3. *Über spontane Stromschwankungen in verschiedenen Elektrizitätsleitern;*
von W. Schottky.

Durch Hintereinanderschalten von Glühkathodenverstärkern ist es in den letzten Jahren gelungen, Wechselströme von äußerst geringer Amplitude wahrnehmbar und meßbar zu machen. Viele technische Probleme haben dadurch eine ruckweise Förderung erfahren, aber auch dem Forscher scheint sich ein neues Gebiet zu erschließen; die Verstärkerschaltungen haben für elektrische Untersuchungen sicher dieselbe Bedeutung wie in der Optik das Mikroskop. Da sich bisher noch keine deutliche Grenze für die erreichbare Verstärkung gezeigt hat, konnte man hoffen, durch genügenden Schutz störungsfreie Aufstellung usw. hier sozusagen bis zum unendlich Kleinen vorzudringen; der Traum vom „Gras wachsen hören" stellte sich wieder einmal recht greifbar der Menschheit dar.

Absicht der folgenden Zeilen ist, gewisse unüberschreitbare Grenzen für die Verstärkung mit Glühkathoden- und Gasentladungsröhren nachzuweisen. Das erste unüberwindliche Hindernis ist merkwürdigerweise durch die Größe des Elementarquantums der Elektrizität gegeben. Die Wärmebewegung der Elektrizität bildet eine weitere Grenze; diese scheint aber in den meisten Fällen höher zu liegen als die andere. Doch schicken wir die Untersuchung dieser Erscheinung als der einfacheren und bekannteren unserer Hauptbetrachtung voraus.

I. Teil. Der Wärmeeffekt.

Wir betrachten einen metallischen Leiter mit verteilter Selbstinduktion und Kapazität, z. B. eine Drahtspule. Ein solches Gebilde ist bekanntlich verschiedener Eigenschwingungen fähig, d. h. es existieren verschiedene Schwingungsvorgänge, die durch einen Strom J, eine Selbstinduktion L, eine Elektrizitätsmenge e und eine Kapazität C charakterisiert sind und bei denen die Teilenergie

$$E = \frac{1}{2} L J^2 + \frac{1}{2} \frac{1}{C} e^2$$

von allen übrigen Vorgängen unabhängig ist. Außerdem gilt noch die Beziehung

$$J = \frac{de}{dt} .$$

Im Falle eines einfachen elektrischen Schwingungskreises, bestehend aus Selbstinduktion und Kapazität, haben hierbei die Größen J, e, C, L die bekannte einfache Bedeutung; bei komplizierteren Eigenschwingungen bleibt wenigstens eine formale Analogie bestehen.

Sei nun unser elektrisches Gebilde allen Einwirkungen von außen entzogen; alle Eigenschwingungen seien infolge der Widerstandsdämpfung abgeklungen. Es ist dann thermisches Gleichgewicht erreicht; die gesamte vorhandene Wärmeenergie verteilt sich nach bestimmten Gesetzen auf die Teilenergien des Systems. Nach einer Bemerkung von Einstein ist dann offenbar auch die mittlere Energie einer elektrischen Eigenschwingung nicht ganz auf Null herabgesunken, sondern besitzt, falls die Teilenergie die oben angegebene Form hat, und die Eigenschwingung nicht allzu hoch liegt, den Wert kT, wobei k die elementare Gaskonstante, T die absolute Temperatur ist. Dieser Satz besteht ganz unabhängig von jeder Annahme über den Mechanismus der Elektrizitätsbewegung in unserem Gebilde; er würde auch gelten, wenn die Elektrizität eine kontinuierlich verteilte Flüssigkeit wäre.

Wenden wir nun den gefundenen Satz auf den Empfangskreis einer Verstärkeranordnung an, und nehmen wir beispielsweise an, daß der Empfangskreis eine Eigenschwingung im Hörgebiete besitzt, so ergibt sich, daß bei genügender Verstärkung in einem am Ende angelegten Telephon auch bei Ausschaltung aller äußeren Störungen ein dauerndes Summen vorhanden sein müßte, das alle schwächeren Signale übertönt und dadurch ihre Aufnahme unmöglich macht.

Über die *Reinheit* der infolge der Wärmebewegung auftretenden Schwingungen gibt folgende Überlegung Aufschluß. Eine langsame elektrische Eigenschwingung läßt sich vergleichen mit der Brownschen Bewegung eines durch elastische Kräfte festgehaltenen größeren Partikelchens in einem Gase. Die Gasmoleküle üben auf ein solches Teilchen zweierlei Wirkungen aus: einerseits wird eine vorhandene Bewegung durch eine der Geschwindigkeit proportionale Reibungskraft gedämpft; andererseits aber bewirken die unregelmäßigen Stöße der Gasmoleküle, daß im Mittel dem Partikel ebensoviel Energie zugeführt wird, wie ihm durch Dämpfung verloren geht. Auf diese Weise wird die mittlere Energie kT aufrechterhalten. Bei einer elektrischen Schwingung spielt der elektrische Widerstand die Rolle des Reibungswiderstandes; die unregelmäßigen Stöße der Gasmoleküle werden ersetzt durch die unregelmäßigen Impulse, welche die geladenen Teilchen innerhalb des Leiters infolge ihres Energieaustausches mit dem übrigen System bekommen. Da sich nun die Energie einer Eigenschwingung aus den — unter einem bestimmten Gesichtspunkte gruppierten — Wechselenergien der elektrischen Elementarteilchen zusammensetzt, wird zugleich mit der Energiezufuhr an diese Elementarteilchen auch die Energie der betrachteten Eigenschwingung erhöht; damit das thermische Gleichgewicht erhalten bleibt, muß diese Energiezufuhr im Mittel ebenso groß sein wie die Energieabnahme der Schwingung infolge der Dämpfung.

Daraus ergibt sich, daß die Dämpfungskonstante direkt das Maß für die Reinheit der durch die Wärmebewegung aufrechterhaltenen Schwingungen bilden muß. Eine ganz ungedämpfte Schwingung müßte dauernd ohne Energiezufuhr fortbestehen, würde also weder in der Phase noch in der Amplitude Schwankungen erleiden; bei einer sehr stark gedämpften Schwingung dagegen geht innerhalb einer Periode ein großer Teil der anfangs vorhandenen Energie verloren. Falls neue Energie zugeführt wird, geschieht dies in ganz unregelmäßiger Weise, so daß schon nach einer Periode Amplitude und Phase der Schwingung völlig gewechselt haben können. Bei hörbaren Frequenzen wird im ersteren Fall im Endtelephon ein vollkommen reiner Ton, im zweiten Falle nur ein unregelmäßiges Geräusch zu hören sein (vorausgesetzt, daß die weiteren Elemente der Verstärkeranordnung die erforderlichen Eigenschaften besitzen, um eine Klangfarbe einigermaßen getreu wiederzugeben).

Der elektrische Widerstand ist also von großem Einfluß auf die *Art* der Schwingung; nicht die Intensität, wohl aber die Reinheit wird von ihm beeinflußt. Wirbelstrom- und Hysteresisverluste gehen hierbei natürlich ebenso ein wie Ohmscher Widerstand; dementsprechend muß auch eine thermische Anregung der Schwingung durch Induktion und von Seiten eines in der Nähe befindlichen magnetischen Materials existieren, deren Verfolgung vielleicht von Interesse wäre.

Als ein Paradoxon erscheint die Folgerung, daß die Wärmeintensität einer elektrischen Eigenschwingung unabhängig von dem Widerstande ist, in dem Falle, wo der Widerstand unendlich groß ist, wo aus dem Leiter ein Isolator wird. In diesem Falle trifft jedoch eine Voraussetzung des kT-Gesetzes nicht mehr zu: um die elektrischen Teilchen wie in einem Leiter zu verlagern, müssen dann große Abtrennungsarbeiten gegen molekulare Kräfte geleitet werden; die elektrische Energie der Eigenschwingung superponiert sich nicht mehr ungestört den übrigen Energien des Systems, sondern kann nur gleichzeitig mit anderen Energien anwachsen. Damit entfällt die Voraussetzung des kT-Gesetzes. Dasselbe ist der Fall, wenn Eigenschwingungen von so kleinen Abmessungen betrachtet werden, daß nur eine kleine Anzahl von Elementarteilchen dazu einen Beitrag liefern kann; die Bewegung dieser Elementarteilchen ist dann gleichzeitig für verschiedene Eigenschwingungen maßgebend, die Schwingungen sind nicht mehr genügend inkohärent, um sich ungestört zu superponieren. Interessant bei der Verfolgung dieser Gedankengänge ist jedenfalls, daß bei der Abzählung der gesamten Freiheitsgrade eines Systems außer den elastischen Freiheitsgraden von Debye noch eine neue Reihe *elektrischer* Freiheitsgrade betrachtet werden muß; die Gesamtzahl der Freiheitsgrade kann natürlich nur ebenso groß sein wie die Zahl der unabhängigen Teilchenkoordinaten, und bei schlechten Leitern sowie bei den höheren Eigenschwingungen werden elektrische und elastische Freiheitsgrade ineinander übergehen.

Bei allen der Technik zugänglichen Frequenzen sind wir aber von diesem Gebiete weit entfernt. Außer dem elektrischen Widerstande sind also überhaupt keine Materialeigenschaften für die Wärmeschwingungen der Elektrizität maßgebend, und auch der Widerstand bestimmt nicht die Energie, sondern nur die *Reinheit* der Schwingung.

Die Berechnung der mittleren Wärmeenergie E_W einer elektrischen Eigenschwingung ist demnach sehr einfach. Es ist

$$E_W = k\,T = 1{,}35 \cdot 10^{-16} \cdot T \text{ erg},$$

oder, in technischen Energieeinheiten (Joule) ausgedrückt,

$$E_W = 1{,}35 \cdot 10^{-23}\,T$$

technische Energieeinheiten. Für Zimmertemperatur ergibt das ca. $4 \,.\, 10^{-21}$ technische Energieeinheiten.

Was dieser Wert als Anfangsenergie in einer Verstärkeranordnung bedeutet, ist noch nicht ohne weiteres ersichtlich. Gegeben ist bei allen Verstärkungsproblemen nicht eine Anfangs*energie*, sondern eine Anfangs*leistung*; genauer: es ist durch die äußeren Bedingungen die Maximalleistung gegeben, die bei geeigneter Anpassung auf die Verstärkeranordnung übertragen werden kann. Wir haben also die Frage so zu stellen: Welches ist die Leistung, die notwendig ist, um im Empfangskreise dauernd eine Energie aufrecht zu erhalten, welche ebenso groß ist wie die Wärmeenergie einer Eigenschwingung? Diese Leistung L_W stellt dann offenbar die Grenze dar für die Anfangsleistungen, deren Verstärkung noch möglich ist, ohne daß die Wärmebewegung das Signal verwischt und übertönt.

Wir beantworten die Frage für einen einfachen Schwingungskreis, bestehend aus Selbstinduktion L und Kapazität C, in dem die Dämpfung durch einen Ohmschen Widerstand R hervorgerufen wird. Die mittlere Energie in einem solchen Schwingungskreise ist gleich $L\overline{J^2}$, nämlich doppelt so groß wie die mittlere magnetische Energie, welche gleich $\frac{L}{2}\,\overline{J^2}$ ist. Die mittlere Leistung dagegen ist gleich $R\overline{J^2}$. Es ist also

$$(1) \qquad L_W = \frac{R\,\overline{J^2}}{L\,\overline{J^2}} \cdot E_W = \frac{R}{L} \cdot E_W .$$

Wird die „Abklingzeit“

$$\vartheta = \frac{2\,L}{R}$$

eingeführt, definiert durch die Zeit, in der die Amplitude einer unbeeinflußten Schwingung auf den Wert $1/e$ abgeklungen ist, so ergibt sich

$$(2)\qquad \begin{cases} L_W = \dfrac{2\,E_W}{\vartheta} = \dfrac{2k\,T}{\vartheta}\ \text{erg/sec} \\ \quad\ = \dfrac{2{,}7 \cdot 10^{-16}\,T}{\vartheta}\ \text{erg/sec} \\ \quad\ = \dfrac{2{,}7 \cdot 10^{-23}\,T}{\vartheta}\ \text{Watt.} \end{cases}$$

Die Abklingzeiten ϑ bewegen sich für die hörbaren und drahtlosen Frequenzen etwa zwischen 10^{-3} und 10^{-4} Sek. Für $\vartheta = 10^{-3}$ und Zimmertemperatur ergibt sich

$$L_W = 8 \cdot 10^{-18}\ \text{Watt.}$$

Berücksichtigt man, daß eine Leistung von 10^{-7} Watt bei geeigneter Frequenz im Telephon noch gut hörbar ist, und daß eine 10000fache lineare Verstärkung, also eine 10^8fache Leistungsverstärkung durchaus nichts Ungewöhnliches ist, daß also Anfangsleistungen von 10^{-15} Watt noch leicht wahrzunehmen sind, so erkennt man, daß die Wärmebewegung der Elektrizität, die einer Anfangsleistung von ca. 10^{-17} Watt entspricht, bereits verhältnismäßig nahe an der Grenze der Wahrnehmbarkeit liegt. Wichtig ist hierbei, daß bei gegebener Leistungsverstärkung *die Wärmebewegung desto eher störend auftritt, je kleiner die Abklingzeit ϑ, je größer also die Dämpfung des Eingangskreises ist.* Dieses Resultat ist bemerkenswert im Gegensatz zu einem anderen, das wir im II. Teil ableiten.

Wird eine äußere Anregung des Schwingungskreises durch Signale ins Auge gefaßt, so bezieht sich das berechnete Verhältnis von Leistung und Energie nur auf eine Anregung mit der Resonanzfrequenz des Schwingungskreises. Bei gewissen Anordnungen ist hierbei auch der Energieverbrauch im Schwingungskreise gleich der maximalen Anfangsleistung zu setzen. In anderen Fällen bestehen zwischen maximaler Anfangsleistung, Energieverbrauch im Schwingungskreise und Verstärkung kompliziertere Beziehungen, die hier nicht erörtert werden können. Soweit der Eingangskreis für die Verstärkung maßgebend ist, werden jedoch in dem Resonanzgebiete die Verhältnisse noch am günstigsten liegen; es läßt sich also der Satz aussprechen, daß im allgemeinen bei einer beliebigen Art von Erregung nur dann Aussicht besteht, größere Endamplituden zu erhalten, als welche durch die Wärmebewegung im Eingangskreise veranlaßt werden, wenn die maximale verfügbare Anfangsleistung den oben für L_W angegebenen Betrag in der Größenordnung von 10^{-17} Watt überschreitet. Die folgenden Überlegungen werden zeigen, daß durch eine andere Erscheinung der ungestörten Verstärkung noch eine engere Grenze gesetzt sein kann

II. Teil. Der „Schroteffekt“.

Der Satz, daß die Wärmeenergie einer elektrischen Eigenschwingung gleich kT ist, bezieht sich auf alle Systeme, die im thermischen Gleichgewichte sind. Verbindung zweier verschiedener Metalle miteinander, das Auftreten von Kontaktpotentialdifferenzen, Einschaltung eines Elektrolyten zwischen zwei gleichartige Metallelektroden ändert nichts an diesem Gesetze. Ja sogar das Vorhandensein elektromotorischer Kräfte, welche einen Dauerstrom oder Wechselstrom fließen lassen, wird den Charakter der elektrischen Wärmeschwingungen nicht ändern, solange die freien Weglängen der elektrischen Teilchen genügend klein sind, um überall noch angenähert thermische Gleichverteilung eintreten zu lassen. Da in guten Leitern bekanntlich selbst bei starken Strömen noch annähernd an jeder Stelle Temperaturgleichgewicht besteht, so werden sich demnach hier die elektrischen Wärmeschwingungen — mit einer Energie, die einer mittleren Temperatur des Leitersystems entspricht — einfach über die stärkeren Ströme überlagern. Erst in Fällen, wo die Bewegung der Leitungselektronen stark von der thermischen abweicht, werden wir eine andere Energie der elektrischen Eigenschwingungen erwarten können. Derartige Fälle können z. B. bei sehr schlechten Leitern vorliegen, wo die elektrische Feldstärke — ohne allzu große Wärmeentwicklung zu veranlassen so groß werden kann, daß auf einer freien Weglänge eines elektrischen Teilchens eine elektrische Feldenergie aufgenommen wird, die die mittlere thermische Energie überwiegt. Insbesondere ist so etwas denkbar in Fällen, wo der Potentialabfall in einzelnen dünnen Schichten oder Grenzflächen lokalisiert ist wie z. B. bei Einbettung eines guten Leiters in ein schlecht leitendes Material oder bei losem Kontakt von gleichartigen oder verschiedenartigen Leitern. Alles das sind kompliziertere Fälle, in denen die Berechnung der elektrischen Schwankungsenergie nur auf Grund neuer Annahmen möglich ist. Einfachen Verhältnissen begegnen wir erst wieder am anderen Ende dieser Stufenreihe: wenn nämlich die freie Weglänge so groß geworden ist, daß jedes elektrische Teilchen das ganze angelegte Feld ohne Widerstand und Zusammenstoß durchläuft. Gerade dieser extreme Fall liegt nun bei gewissen auch zum Verstärken benutzten Entladungsröhren vor; sowohl die Hochvakuum-Glühkathodenröhren wie einige Restgasröhren arbeiten mit freien Weglängen, die groß sind gegen die Elektrodenentfernungen.

Als Beispiele für derartige Entladungsvorgänge erwähnen wir folgende:

1. Verdünntes Gas mit Strahlungsionisierung.

Der Ionisator Q sende Röntgenstrahlen oder kurzwelliges Licht in den verdünnten Entladungsraum zwischen Anode A und Kathode K. Die erzeugten Ionen entladen sich bei genügend geringem Drucke ohne Zusammenstöße oder Rekombination an die Anode und Kathode; jedem einzelnen Ionisierungsvorgange entspricht hierbei der Übergang von A nach K einer Elektrizitätsmenge, die gleich der Ladung des bei der Ionisation erzeugten positiven Ions ist. (Fig. 1).

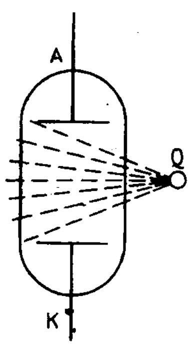

Fig. 1.

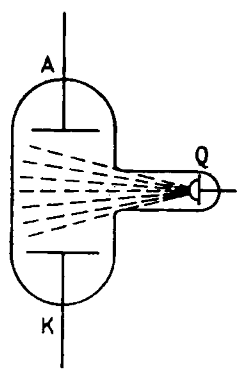

Fig. 2.

2. Verdünntes Gas mit korpuskularer Ionisierung.

Statt einer Strahlungsquelle kann auch ein Präparat, welches korpuskulare Strahlen hoher Geschwindigkeit aussendet, als Ionisator gedacht werden, z. B. eine radioaktive Substanz (Fig. 2). Die nötige Geschwindigkeit kann jedoch den ionisierenden Teilchen auch durch ein besonderes Feld erteilt werden; z. B. kann (Fig. 3) die Strahlungsquelle Q eine Glühkathode sein, aus der durch ein an A' angelegtes, beschleunigendes Feld Elektronen durch den Ionisierungsraum hindurchgezogen werden. Endlich fällt unter diese Gruppe auch die bekannte Glühkathodenverstärkerröhre mit Gitterelektrode, sofern noch ein Gasrest darin enthalten ist (Fig. 4). Die Glühkathode kann hierbei als Ionisierungs-

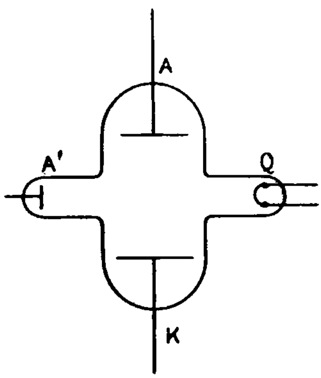

Fig. 3.

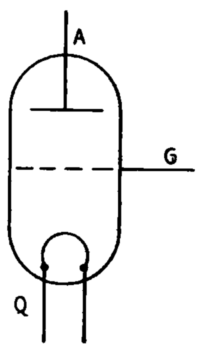

Fig. 4.

quelle angesehen werden; das durch das Gitter G hindurchgreifende Feld der Anode gibt den austretenden Elektronen genügend hohe Geschwindigkeit, um das Gas zwischen G und A zu ionisieren, und von den entstehenden Ionen wandern die negativen zur Anode, die positiven größtenteils zum Gitter. Ist das Gitter noch, wie bei den bekannten Betriebsbedingungen der Verstärkerrohre, genügend negativ gegen die Glühkathode Q, um das direkte Auftreffen von Elektronen zu verhindern, so ist der von G abfließende Strom ein reiner Gasionisierungsstrom.

3. Elektronenentladung im vollkommenen Vakuum.

Der Fall, wo von einer zum Glühen gebrachten Kathode K Elektronen durch den völlig gasfreien Entladungsraum zur Anode A übergehen, stellt das einfachste und reinste Beispiel eines Entladungsvorganges dar, bei dem die elektrischen Teilchen das ganze angelegte Feld frei durchlaufen. Die übergehende Elementarladung ist dabei das bekannte negative Elektrizitätsquant $= 4{,}69 \,.\, 10^{-10}$ elektrostat. Einh. In den Hochvakuumverstärkerröhren spielt sich ein derartiger Entladungsvorgang zwischen Kathode und Anode ab.

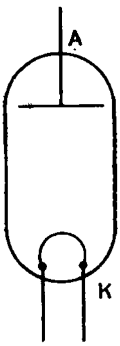

Fig. 5.

In allen aufgezählten Fällen tritt nun offenbar eine andere Art von Stromschwankung innerhalb des Entladungsrohres auf, als die durch die Wärmebewegung veranlaßte. Wegen der atomistischen Konstitution der Elektrizität stellt sich der Elektrizitätsübergang nicht als ein gleichmäßig fließender Strom, sondern als ein Hagel von Ladungsquanten dar, der selbst bei ganz regelmäßiger zeitlicher Verteilung zu Stromschwankungen Veranlassung geben würde, deren Frequenz durch die Anzahl der pro Sekunde übergehenden Teilchen gegeben wäre. Nun findet aber sicher der Übergang nicht regelmäßig statt, sondern es treffen in aufeinanderfolgenden Zeitintervallen τ bald mehr, bald weniger Ladungsquanten auf, so daß für jede willkürliche Periode τ eine Wechselstromkomponente des Entladungsstromes zu beobachten sein wird. In allen oben genannten Fällen bietet sich nun eine einfache naheliegende Annahme, welche gestattet, diese Stromschwankungen für eine beliebige Periode τ zu berechnen. Man hat nur vorauszusetzen, *daß der Übergang eines Ladungsquants zwischen Kathode und Anode einen Elementarvorgang darstellt, dessen Eintreten in keinem zeitlichen Zusammenhang mit dem Übergang irgendeines anderen Ladungsteilchens steht.* Daß diese Annahme in Fall 1 und 2 erfüllt ist, leuchtet ohne weiteres ein; auch beim Austritt von Elektronen aus einer Glühkathode wird sich jedoch diese Annahme kaum umgehen lassen, schon deshalb, weil die mittlere Entfernung zweier annähernd gleichzeitig austretender Elektronen bei den üblichen Stromstärken sehr viele Atomdurchmesser betragen muß. In allen betrachteten Fällen lassen sich also auf den Elektrizitätsübergang die Wahrscheinlichkeitsgesetze für die gänzlich ungeordnete zeitliche Verteilung von gleichartigen Elementarereignissen anwenden.

Wir berechnen zunächst auf einfachste Weise eine Größe, deren elektrische Bedeutung allerdings nicht ohne weiteres zu übersehen ist: das mittlere Schwankungsquadrat für eine vorgegebene Periode τ. Sei i_0 der zeitliche Mittelwert des Entladungsstromes während sehr langer Zeiten, i_τ der Mittelwert des Stromes während eines bestimmten ins Auge gefaßten Zeitintervalles τ. Sei ferner

$$j_\tau = i_\tau - i_0$$

die Abweichung des Stromes i_τ vom zeitlichen Durchschnitt. Dann ist die zu berechnende Größe der quadratische Mittelwert $\overline{j_\tau^2}$.

Ist N die mittlere Zahl der Elementarentladungen in einer Sekunde, so ist die mittlere Zahl der in einem Zeitintervall τ übergehenden Elementarladungen gleich $N\tau$. In einem bestimmten Zeitintervall τ findet dagegen in der Regel nicht diese Anzahl von Übergängen statt, sondern eine Anzahl n_τ, welche von $N \cdot \tau$ verschieden ist. Für den Mittelwert der Abweichung

$$\mathfrak{n}_\tau = n_\tau - N\tau$$

gilt, falls in dem Zeitintervall τ eine große Anzahl von Elementarereignissen stattfindet, unseren Voraussetzungen zufolge das bekannte Schwankungsgesetz

$$\overline{\mathfrak{n}_\tau^2} = N\tau\,.$$

Bezeichnet e die Elektrizitätsmenge, die bei einem einzelnen Elementarprozesse zwischen Anode und Kathode übergeht, so ist

$$j_\tau = \frac{e\,\mathfrak{n}_\tau}{\tau}\,;$$

es ergibt sich also

$$\overline{j_\tau^2} = \frac{e^2}{\tau^2}\,\overline{\mathfrak{n}_\tau^2} = \frac{e^2}{\tau^2} \cdot N\tau\,,$$

$$\overline{j_\tau^2} = \frac{e^2}{\tau} \cdot N$$

oder wegen

$$i_0 = e N$$

(3) $$\overline{j_\tau^2} = \frac{i_0 \cdot e}{\tau}$$

oder in anderer Form

(4) $$\overline{j_\tau^2} = \frac{i_0^2}{N\tau}\,.$$

Die wesentlichen Eigenschaften des Effektes lassen sich aus diesen Formeln bereits deutlich erkennen. Definieren wir eine Amplitude a des mittleren Wechselstromes durch

$$a = \sqrt{\overline{j_\tau^2}},$$

so bestehen folgende Sätze:

1. *Die Amplitude des durch den „Schroteffekt"[1]) hervorgerufenen mittleren Wechselstromes bestimmter Periode ist bei gegebenem mittlerem Entladungsstrom proportional der Wurzel aus der Elementarladung, die bei einem Elementarvorgang von einer Elektrode zur anderen transportiert wird.*

Der Effekt würde also, im Gegensatze zum Wärmeeffekt, vollständig verschwinden, wenn die Elektrizität in beliebig kleinen Quanten aufträte. Die absolute Größe des elektrischen Elementarquants bestimmt die Größenordnung des Effekts; eine Messung des Effekts würde umgekehrt einen Rückschluß auf die Größe des elektrischen Elementarquants gestatten. Falls in einem Gase bei jedem Elementarprozesse zweiwertige Ionen gebildet werden, müßte die Amplitude des Wechselstromes im Verhältnis $\sqrt{2}$ gegenüber dem Effekt bei einwertigen Ionen ansteigen. Einen besonders ausgeprägten Effekt hätte man in Fällen zu erwarten, wo die Ionisierung eines Gasteilchens oder das Austreten eines Elektrons als auslösende Ursache eines momentanen starken Ionisierungsvorganges wirkt; als Ladungsgröße würde dann nämlich die ganze bei dem ausgelösten Vorgange von einer Elektrode zur andern transportierte Elektrizitätsmenge auftreten. Es ist nicht ausgeschlossen, daß bei der gewöhnlichen Glimmentladung derartige komplexe Entladungsvorgänge als unabhängige Elementarereignisse aufzufassen sind.

Unter Zugrundelegung von Gleichung (4) entspricht dem Satze 1 folgende Aussage:

2. *Bei gegebenen mittlerem Entladungsstrome ist die Amplitude des durch den Schroteffekt hervorgerufenen Wechselstromes bestimmter Periode umgekehrt proportional der Wurzel aus der*

1) Diese Bezeichnung ist mit Rücksicht auf die Entstehungsart gewählt; der Ausdruck „Schrot" weist, wie im gewöhnlichen Sprachgebrauch, auf das Auftreten von einer großen Zahl gleichartiger Elementarteilchen hin.

sekundlichen Zahl der unabhängigen Elementarereignisse, die den Stromübergang veranlassen. Ferner liest man aus Gl. (3) noch folgende Sätze ab:

3. *Bei gegebener Elementarladung wächst die Amplitude des Schroteffekt-Wechselstromes bestimmter Periode proportional der Wurzel aus dem mittleren Entladungsstrom.*

Ein Anwachsen des Stromes verwischt also nicht etwa, wie man zunächst annehmen könnte, den Effekt, sondern läßt ihn immer stärker hervortreten; was abnimmt, ist nur das *Verhältnis* der Amplitude des Wechselstromes zu dem mittleren Gleichstrom, das gemäß der Bezeichnung

$$\frac{a}{i_0} = \sqrt{\frac{\varepsilon}{i_0\,\tau}}$$

mit der Stromstärke abnimmt.

4. *Die Wechselstromamplitude des Schroteffekts ist verschieden, je nach der zugrunde gelegten Periode. Je kleiner die Periode, desto größer der Wechselstrom; die Amplitude wächst umgekehrt proportional der Wurzel aus der Periode.*

Diese Beziehung gilt nur so lange, als innerhalb einer Periode noch eine größere Zahl von Elementarereignissen stattfindet; bei Benutzung von Formel (3) wird man das Aufhören dieser Voraussetzung daran erkennen können, daß der berechnete Wechselstrom in die Größenordnung des Gleichstromes fällt.

Die Bedeutung des Satzes 4 wird bei hohen Frequenzen eingeschränkt durch den Umstand, daß bei der Wahrnehmbarmachung und Messung hoher Frequenzen immer nur Mittelwerte über größere Zeiten wiedergegeben werden. Wir kommen zum Schlusse auf diesen Punkt zurück.

Wirkung des Schroteffektes auf einen Schwingungskreis.

Zur Beurteilung der absoluten Größe des Effekts sind die einfachen Formeln (3) und (4), wie erwähnt, wenig geeignet, da die genaue physikalische Bedeutung des mittleren Stromschwankungsquadrates ebenso schwer anzugeben ist, wie eine direkte Meßmethode dieser Größe. Es soll deshalb nunmehr ein besonderer Fall mit physikalisch vollständig definierten Bedingungen näher untersucht werden, nämlich die Anregung eines abgestimmten gedämpften Schwingungskreises durch den Schroteffekt. Wir können dann die auftretende Schwingungsenergie direkt mit der Energie der Wärmeschwingungen, sowie mit einer dem Schwingungskreise zugeführten Signalenergie vergleichen und haben damit ein Urteil über die Bedeutung des Effekts gewonnen.

Eine induktive Einwirkung des Entladungsstromes auf äußere Schwingungskreise kommt bei der geringen Induktivität der Entladungsbahn kaum in Frage. Der wichtigste Fall ist der, wo ein Schwingungskreis und eine Entladungsröhre in denselben Stromkreis eingeschaltet sind, und zwar liegt, den hohen Widerständen der Entladungsröhren entsprechend, gewöhnlich der Schwingungskreis so an der Röhre, daß er auf Spannungsschwankungen anspricht, also entsprechend der Schaltung in Fig. 6.

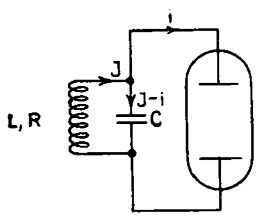

Fig. 6.

Von der Existenz mehrerer Eigenschwingungen in dem Schwingungskreis L, R, C sehen wir vorläufig ab. Die zu lösende Aufgabe hat dann sehr viel Ähnlichkeit mit einer von M. Planck in seiner älteren Strahlungstheorie behandelten: es ist die mittlere Energie eines gedämpften Oszillators unter der Einwirkung ganz unregelmäßiger Anstöße zu berechnen, wobei jedoch die „spektrale Verteilung" der erregenden Oszillation nicht durch das Wärmestrahlungsgesetz, sondern durch das „Fehlergesetz" bestimmt ist.

Wir behandeln nacheinander folgende Teilaufgaben:

1. Berechnung der Energie des Schwingungskreises unter der Wirkung periodischer Ströme in der Entladungsröhre.

2. Berechnung der mittleren Energie des Schwingungskreises unter der Wirkung vieler verschiedener periodischer Ströme in der Entladungsröhre (entsprechend einer Fourierschen Zerlegung).

3. Auswertung der Mittelwertausdrücke unter Zugrundelegung der Annahme der „unabhängigen Elementarereignisse".

1. Bezeichnen J und i die Ströme in der Induktionsspule und im Entladungsrohre in der in Fig. 6 durch Pfeile bezeichneten Richtung, so ist

$$L \frac{dJ}{dt} + \frac{1}{C} \int J \, dt - RJ = \frac{1}{C} \int i \, dt,$$

$$\frac{d^2 J}{dt^2} + \frac{1}{LC} J - \frac{R}{L} \frac{dJ}{dt} = \frac{1}{LC} i,$$

oder, mit Einführung der Eigenschwingung des Schwingungskreises

$$\omega_0^2 = \frac{1}{LC}$$

und der Dämpfungskonstanten

$$\varrho = \frac{R}{L}:$$

$$\frac{d^2 J}{dt^2} + \omega_0^2 J - \varrho \frac{dJ}{dt} = \omega_0^2 i.$$

Ist i eine periodische Funktion

$$i_k = C_k \,.\, \sin(\omega t + \varphi_k),$$

so ergibt sich als stationäre Lösung

$$J_k = a_k \,.\, \sin(\omega t + \varphi_k'),$$

wobei

$$a_k = C_k \omega_0^2 \sqrt{\frac{1}{(\omega^2 - \omega_0^2)^2 + \varrho^2 \omega^2}},$$

oder mit

$$\frac{\omega}{\omega_0} = x, \quad \frac{\varrho}{\omega_0} = r$$

$$a_k = C_k \sqrt{\frac{1}{(1 - x^2)^2 + r^2 x^2}}$$

ist. Die Energie der Schwingung ist $E_k = L a_k^2$, also

(5)
$$E_k = C_k^2 \cdot L \frac{1}{(1 - x^2)^2 + r^2 x^2}.$$

2. Wir denken uns nun den wirklichen in der Entladungsröhre fließenden Strom mit seinen durch den Schroteffekt veranlaßten Schwankungen zwischen der Zeit $t = 0$ und der großen Zeit $t = \mathfrak{T}$ in eine Fouriersche Reihe entwickelt.

$$i = \sum_{k=0}^{\infty} i_k = \sum_{k=0}^{\infty} C_k \sin(\omega_k t + \varphi_k),$$

wobei

$$\omega_k = \frac{2 \pi k}{\mathfrak{T}}.$$

Der durch den Schroteffekt veranlaßte Mittelwert der Energie des Schwingungskreises $\overline{E_S}$ ist dann gegeben durch

$$(6) \qquad \overline{E_S} = \sum E_k = L \sum_{k=0}^{\infty} \frac{C_k^2}{2} \cdot \frac{1}{(1-x^2)^2 + r^2 x^2} \,.$$

Hierbei hängt

$$x = \frac{2\pi}{\omega_0 \cdot \mathfrak{T}} \cdot k$$

ebenfalls von der Ordnungszahl k ab.

3. Indem wir den Ausdruck (6) unter Zugrundelegung bekannter Eigenschaften des Schroteffektes auswerten, machen wir die vereinfachende Voraussetzung, daß der Strom i nicht durch die Spannungsschwankungen beeinflußt wird, welche die im Kreise L, R, C vorhandene elektrische Schwingung an den Elektroden der Entladungsröhre hervorruft. Die Schwankungen des Stromes i sind dann durch zufällige Schwankungen der Zahl der Elementarvorgänge allein gegeben.

Für jede Teilerscheinung ist

$$C_k = \frac{2}{\mathfrak{T}} \int_0^{\mathfrak{T}} i \cdot \sin(\omega_k t + \varphi_k)\, dt \,,$$

oder, wenn $i = i_0 + j$ gesetzt wird,

$$C_k = \frac{2}{\mathfrak{T}} \int_0^{\mathfrak{T}} j \sin(\omega_k t + \varphi_k)\, dt \,,$$

da

$$\int_0^{\mathfrak{T}} i_0 \sin(\omega_k t + \varphi_k)\, dt = 0$$

ist.

Die Werte C_k werden wegen des unregelmäßigen Charakters des Schroteffektes mit der Ordnungszahl k rasch und unregelmäßig schwanken. Bei genügend großem $\mathfrak{T}$ werden jedoch zu einem kleinen Gebiete zwischen x und $x + \Delta x$ eine beliebig große Zahl von verschiedenen Werten k und Koeffizienten C_k gehören. Es ist infolgedessen gestattet, die Mittelwertbildung über C_k^2 innerhalb eines gewissen Bereiches vorzunehmen, ohne die Veränderlichkeit von x dabei zu berücksichtigen.

Seien k_1 und k_2 um sehr viele Einheiten voneinander verschiedene Zahlen, die aber nur einer im Verhältnis zu 1 geringen Änderung von x entsprechen. Wir haben dann den Ausdruck zu bilden

$$(7)\qquad \sum_{k=k_1}^{k_2} C_k^2 = \frac{4}{\mathfrak{T}^2} \sum_{k=k_1}^{k_2} \left\{ \int_0^{\mathfrak{T}} j \cdot \sin(\omega_k t + \varphi_k) \right\}^2 .$$

Ein einzelnes Glied der Summe läßt sich in der Form schreiben:

$$(8)\qquad \int_{t=0}^{\mathfrak{T}} \int_{t'=0}^{\mathfrak{T}} j\, j' \sin(\omega_k t + \varphi_k)(\sin \omega_k t' + \varphi_k)\, d t\, d t' .$$

Wir bemerken nun noch, daß der Wert von $\overline{C_k^2}$ nur für Frequenzen ω_k gebildet zu werden braucht, die nicht ein sehr großes Vielfaches von der Eigenfrequenz des Schwingungskreises, ω_0, sind. Denn aus Gl. (6) ergibt sich, daß die Frequenzen, die sehr hohen k-Werten entsprechen, zu der mittleren Energie $\overline{E_S}$ verschwindend wenig beitragen. Machen wir nun weiter die Voraussetzung, daß für alle Frequenzen, die in der Größenordnung von ω_0 und darunter liegen, innerhalb einer Periode τ_k noch sehr viele Elementarvorgänge stattfinden, d. h. also, daß in die Eigenperiode τ_0 des Schwingungskreises sehr viele Elementarvorgänge fallen, so wird auch angenommen werden können, daß in einem solchen Bruchteil der Periode, in dem sich der Wert von $\sin(\omega_k t + \varphi_k)$ nur verschwindend wenig ändert, noch viele Elementarvorgänge stattfinden. Wir können dann ohne Fehler statt der Zeitelemente dt und dt' so große Zeitelemente Δt und $\Delta t'$ einführen, daß die Zahl $n\,\Delta t$ der in der Zeit Δt übergehenden Elementarladungen noch groß ist; desgleichen für $\Delta t'$.

Dieser Umstand rechtfertigt a posteriori die Einführung einer Stromgröße j bei dem betrachteten Effekt. Müßten unendlich kleine Zeitelemente betrachtet werden, so würde ja, je nachdem, ob in den betreffenden Zeitpunkt gerade eine Ladung übergeht oder nicht, die Stromwerte $j = \infty$ oder $j = 0$ angenommen werden.

Der Ausdruck (8) geht dann über in die Doppelsumme

$$(9)\qquad \sum_{t=0}^{\mathfrak{T}} \sum_{t'=0}^{\mathfrak{T}} j\,\Delta t \cdot j'\,\Delta t' \cdot \sin(\omega_k t + \varphi_k)(\sin \omega_k t' + \varphi_k),$$

wobei für t und t' jedesmal Werte gesetzt werden können, die in der Mitte der Zeitintervalle Δt und $\Delta t'$ liegen.

Den Ausdruck (9) zerlegen wir nun in zwei Teile. Der erste Teil soll alle Glieder der Summe enthalten, in denen $t = t'$, $j = j'$, $\Delta t = \Delta t'$ ist; man erhält dann die einfache Summe

$$\sum_{t=0}^{\mathfrak{T}} (j\,\Delta\,t)^2 \sin^2(\omega_k t + \varphi_k). \tag{10}$$

Nun sind nach unserer Voraussetzung innerhalb der Zeit $\mathfrak{T}$ sehr viele Perioden vorhanden. Es treten also in der Summe sehr viele Glieder auf, in denen $\sin(\omega_k t + \varphi_k)$ denselben Wert hat. Mithin ist es gestattet, für jeden Wert des Sinus mit dem Mittelwert von $(j\,\Delta\,t)^2$ zu multiplizieren. Dieser Mittelwert ist aber von t unabhängig; da $j\,\Delta\,t = e\,.\,\mathfrak{n}_\Delta$ und nach dem bereits herangezogenen Schwankungsgesetze

$$\overline{\mathfrak{n}^2_{\Delta t}} = N \cdot \Delta\,t$$

ist, so ergibt sich

$$\overline{(j\,\Delta\,t)^2} = e^2\,\overline{\mathfrak{n}^2_{\Delta t}} = e^2 N\,\Delta\,t = e\,i_0\,\Delta t.$$

Es geht also (10) über in

$$e\,i_0 \sum_{t=0}^{\mathfrak{T}} \sin^2(\omega_k t + \varphi_k)\,\Delta\,t$$
$$= e\,i_0 \cdot \frac{\mathfrak{T}}{2} \cdot$$

Dieser Ausdruck ist von der Ordnungszahl k unabhängig; nach Einsetzen in (7) ergibt sich also als Betrag von

$$\sum_{k=k_1}^{k_2} C_k^{\,2},$$

soweit der erste Teil der Doppelsumme (9) in Frage kommt, der Ausdruck

$$\frac{2}{\mathfrak{T}}\,(k_2 - k_1)\,e\,i_0\,. \tag{11}$$

Wir zeigen nun, daß der andere, bisher nicht betrachtete Teil der Doppelsumme (9) zu dem Ausdruck (7) nur einen gegen (11) verschwindend kleinen Beitrag liefert. Wir können uns dabei auf Größenordnungsbetrachtungen beschränken. Da alle Werte j und j', die sich nicht auf das gleiche Intervall $\Delta\,t$ beziehen, voneinander unabhängig sind und ebenso oft positiv wie negativ sein können, besteht auch der Rest der Summe (9) aus lauter Summanden, die ebenso oft positiv wie negativ sein können. Die Multiplikation mit den Sinusfunktionen, die ebenfalls ebenso oft positiv wie negativ sind, ändert nichts an dieser Tatsache; die Größenordnung des Sinusproduktes ist 1, die Anzahl der zu betrachtenden Summanden

$$\frac{\mathfrak{T}}{\Delta t} \cdot \frac{\mathfrak{T}}{\Delta t'} \,.$$

Nun ist bekanntlich die Größenordnung einer Summe von p Gliedern der Größenordnung a, die ebensogut positiv wie negativ sein können, von der Größenordnung $\sqrt{p} \,.\, a$, und zwar kann dieser Ausdruck ebensogut positiv wie negativ sein. Da nun das Produkt $j\,\Delta t \,.\, j'\,\Delta t'$ von der Größenordnung

$$\overline{(j\,\Delta t)^2} = i_0\, e\, \Delta t$$

ist, so ergibt sich als Größenordnung für den zweiten Teil der Doppelsumme (9) der Ausdruck

$$\sqrt{\frac{\mathfrak{T}}{\Delta t} \cdot \frac{\mathfrak{T}'}{\Delta t'}} \cdot e\, i_0\, \Delta t = \mathfrak{T}\, e\, i_0 \,.$$

Man sieht also, daß das Restglied für jeden einzelnen k-Wert von derselben Größenordnung ist wie das für alle k-Werte gleiche Glied, das wir oben berechneten. Da dieses Restglied ebenso oft positiv wie negativ sein kann, so schwankt also der Wert von C_k^2 für jedes einzelne k-Glied nach beiden Seiten um Werte von der Größenordnung seines mittleren Betrages. Werden nun aber viele Glieder C_k^2 zusammengefaßt, so liefert der zweite Teil der Doppelsumme, zufolge dem schon erwähnten Gesetze, nur noch einen Betrag zu (7) von der Größenordnung

$$\sqrt{k_2 - k_1} \cdot \mathfrak{T} \cdot e \cdot i_0 \,.$$

Sobald also $k_2 - k_1$ groß genug gewählt ist, verschwindet dieser Teil gegen den durch (11) wiedergegebenen Teil und wir erhalten

$$\sum_{k=k_1}^{k_2} C_k^2 = (k_2 - k_1) \cdot \frac{2}{\mathfrak{T}} \cdot e\, i_0 \,. \tag{12}$$

Mithin ist der Mittelwert von C_k^2 von k unabhängig, sofern nur eine genügend große Anzahl Glieder zusammengefaßt werden; es ist

$$\overline{C_k^2} = \frac{\sum\limits_{k=k_1}^{k_2} C_k^2}{k_2 - k_1} = \frac{2}{\mathfrak{T}} \cdot e \cdot i_0 \,.$$

Dieses Resultat setzen wir nunmehr in den Ausdruck (6) für die Energie $\overline{E_S}$ ein. Es wird

$$(13)\qquad \overline{E_S} = L\,e\,i_0 \cdot \frac{1}{\mathfrak{T}} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(1-x^2)^2 + r^2 x^2}\,.$$

Da

$$\omega_k = \frac{2\pi k}{\mathfrak{T}} \quad \text{und} \quad x_k = \frac{\omega_k}{\omega_0}$$

ist und da nach unseren früheren Ausführungen einem Fortrücken von k um eine Einheit nur eine sehr kleine Änderung von x entspricht, kann gesetzt werden

$$1 = \frac{\mathfrak{T}}{2\pi} \cdot (\omega_k - \omega_{k-1}) = \frac{\mathfrak{T}}{2\pi} \cdot \omega_0\, d x,$$

und statt der Summation über alle Werte k ist die Integration über x auszuführen.

Mithin wird

$$\frac{1}{\mathfrak{T}} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(1-x^2)^2 + r^2 x^2} = \frac{\omega_0}{2\pi} \int_0^{\infty} \frac{d x}{(1-x^2)^2 + r^2 x^2}$$

oder, nach Auswertung des bestimmten Integrals,

$$\int_0^{\infty} \frac{d x}{(1-x^2)^2 + r^2 x^2} = \frac{2\pi}{r^2}:$$

$$\frac{1}{\mathfrak{T}} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(1-x^2)^2 + r^2 x^2} = \frac{\omega_0}{r^2} = \frac{\omega_0^3}{\varrho^2}\,.$$

Es wird also schließlich

$$(14)\qquad \overline{E_S} = \frac{\omega_0^2}{\varrho^2} \cdot \omega_0\, L \cdot e\, i_0\,.$$

Wird die Eigenperiode

$$\tau = \frac{2\pi}{\omega_0}$$

und die Abklingzeit

$$\vartheta = \frac{2}{\varrho}$$

eingeführt, so wird in technisch übersichtlichster Gruppierung

$$(14')\qquad \overline{E_S} = e \cdot \left(\frac{\pi\,\vartheta}{\tau}\right)^2 \cdot \omega_0\, L \cdot i_0$$

oder in mathematisch einfachster Form

$$(14'')\qquad \overline{E_S} = \frac{2\,\pi^3\, e\, L\, \vartheta^2\, i_0}{\tau^2}\,.$$

Aus dem Vergleich von (14) mit (5), wo alsdann $x = 1$ zu setzen ist, leiten wir folgenden Satz ab:

Die durch den Schroteffekt verursachten Stromschwankungen in einer Entladungsröhre wirken auf einen parallel geschalteten Resonator von der Eigenperiode τ und beliebiger Dämpfung so, als ob in der Entladungsröhre ein rein sinusförmiger Wechselstrom von der Periode τ und der effektiven Amplitude

$$\sqrt{\pi}\,\sqrt{\frac{e\,i_0}{\tau}}$$

vorhanden wäre.

Damit ist die physikalische Zulässigkeit unserer vorausgeschickten Annäherungsrechnung in einem wichtigen Falle bestätigt; die genaue effektive Amplitude des zu substituierenden Wechselstromes unterscheidet sich in diesem Falle von der durch Gleichung (3) bestimmten nur durch den Faktor $\sqrt{\pi}$.

Was den Charakter (die Reinheit) der in dem Schwingungskreise L, R, C durch den Schroteffekt verursachten Schwingung betrifft, so ist dieser offenbar genau derselbe wie bei der Wärmeschwingung; die Reinheit der Schwingung ist wieder durch das Verhältnis der Abklingzeit ϑ zur Periode τ bedingt. Dies gilt, solange in der Zeit τ eine große Zahl von Elementarvorgängen stattfindet; in diesem, dem vermutlich einzig meßbaren Falle, ist also der Ursprung der Schwingung aus ihrer Art nicht zu erkennen, nur die Größe des Effektes ist verschieden. Wie weit die Gesetze der großen Zahlen bei technischen Strömen und Frequenzen noch anwendbar sind, mag aus der Tatsache erhellen, daß bei einem Gleichstrom von 10^{-12} Amp. immer noch in 1 millionstel Sekunde ca. 1000 Elementarladungen übergehen.

Wie groß ist nun die von dem Schroteffekt verursachte Schwingungsenergie in unserem Schwingungskreise im Verhältnis zu der Wärme-Schwingungsenergie kT? Unter der Annahme, daß die bei einem Elementarvorgang übergehende Ladung ihren kleinsten Betrag, $\varepsilon = 4{,}69 \,.\, 10^{-10}$ elektrostat. Einh. hat, ergibt sich, in technischen Energieeinheiten ($\varepsilon = 1{,}56 \,.\, 10^{-19}$ Coulomb),

$$\overline{E_S} = 1{,}55 \cdot 10^{-18}\,\frac{\vartheta^2}{\tau^2}\,\omega_0\,L\,i_0\,.$$

In der Verstärkertechnik gebräuchliche Werte sind $\frac{\vartheta}{\tau} = 3$ bis 30, $\omega_0 L \,.\, i_0 = 10^{-3}$ bis 1. Danach bewegt sich $\overline{E_S}$ zwischen ca. 10^{-20} und 10^{-15} technischen Energieeinheiten; die durch den Schroteffekt verursachte Energie der Schwingung eines einfachen Schwingungskreises ist also doppelt bis 200000mal so groß als die durch die Wärmebewegung bei Zimmertemperatur hervorgerufene Energie der Eigenschwingung.

Ebenso wie im I. Teil bei der Wärmebewegung kann nun zu der mittleren Energie $\overline{E_S}$ eine Leistung L_S angegeben werden, die notwendig wäre, um durch Anregung von außen (z. B. induktiv) die Schwingungsenergie im Kreise L, R, C dauernd aufrecht zu erhalten. Entsprechend der oben eingeführten Annahme, daß die Spannungsschwankungen am Kondensator keine Stromänderung in der Röhre verursachen, kann hierbei von einem Energieverbrauch durch die Röhre abgesehen werden, und es muß nur die im Verlustwiderstand des Schwingungskreises verbrauchte Energie dauernd zugeführt werden. Wie früher ergibt sich

$$\mathsf{L}_S = \frac{2\,\overline{E_S}}{\vartheta},$$

also aus (14′)

$$\mathsf{L}_S = \frac{2\pi^2 e\, \omega_0\, L\, \vartheta\, i_0}{\tau^2}\,. \tag{15}$$

Ist der betrachtete Schwingungskreis der Empfangskreis einer Verstärkeranordnung, so kann L_S wieder mit der maximalen Anfangsleistung, die durch ein gegebenes schwaches Signal dem Empfangskreise mitgeteilt werden kann, verglichen und der Satz aufgestellt werden, daß zur Verfügung stehende Anfangsleistungen, die kleiner als L_S sind, von der durch den Schroteffekt hervorgerufenen Schwingung überdeckt werden. L_S bietet also wiederum ein Maß für die kleinsten noch aufnehmbaren Empfangsenergien, und zwar handelt es sich diesmal um die ausschlaggebende Berechnung, da, wie wir feststellten, der Schroteffekt zu größeren Störungen Anlaß gibt als der Wärmeeffekt.

Wir lesen aus Gl. (15) folgende Sätze ab:

1. *Der Schroteffekt gibt desto eher zu Störungen Anlaß, je größer die Abklingzeit, je kleiner also die Dämpfung des Empfangskreises ist.*

2. *Die Störung durch den Schroteffekt ist desto größer, je größer die Induktanz des Eingangskreises bei der Resonanzschwingung ist.*

3. *Die Störung erreicht desto größere Werte, je kleiner die Resonanzperiode des Eingangskreises ist.*

Die Abhängigkeit von i_0 und e wurde schon früher diskutiert.

Ist e gleich der Elementarladung eines Elektrons, so wird

$$\mathsf{L}_S = 3{,}1 \cdot 10^{-18} \cdot \frac{\omega_0 L \vartheta i_0}{\tau^2} .$$

ϑ hat die mittlere Größenordnung $^1/_{1000}$ Sekunde. Bei Entladungsröhren mit Elektronen oder einwertigen Ionen von großer Weglänge bewegt sich also die Leistung, die dem Anfangskreise durch den Schroteffekt zugeführt wird, unter Zugrundelegung der oben für $\overline{E_S}$ angegebenen Grenzen zwischen 10^{-17} und 10^{-12} Watt. Da 10^{-15} Watt eine durch Verstärkung gut wahrnehmbar zu machende Leistung darstellt, ist es klar, daß der Schroteffekt sich in der Verstärkertechnik unangenehm bemerkbar machen muß; sicher ist er schon öfter beobachtet worden, ohne daß man seine Ursache erkannte.

Von theoretischem Interesse ist die quantitative Bestimmung der Elementarladung aus der Größe der durch den Schroteffekt hervorgerufenen Stromschwankungen. Hierbei wird es zweckmäßig sein, nicht die in den Verstärkerröhren selbst auftretenden Störungen zu benutzen, sondern zu einem Schwingungskreise eine besondere Entladungsröhre, beispielsweise eine Glühkathodenröhre mit hohen Entladungsströmen i_0 parallel zu legen und dann die in dem Schwingungskreise auftretenden Schwankungen zu verstärken. Derartige Versuche sollen im K-Laboratorium des Wernerwerkes von Siemens & Halske demnächst ausgeführt werden.

Zur Vervollständigung des Bildes mag zum Schluß auf zwei verallgemeinernde Betrachtungen noch kurz hingewiesen werden.

Falls an Stelle des einfachen Schwingungssystemes L, R, C *Systeme mit vielen verschiedenen Eigenschwingungen* betrachtet werden, kann die durch den Schroteffekt verursachte Energie jeder einzelnen Eigenschwingung so berechnet werden, als ob die übrigen Eigenschwingungen nicht vorhanden wären. Jeder dieser Eigenschwingungen entspricht dann ein gewisser Energieverbrauch in dem schwingenden Gebilde, und zwar steigt die Energie und demnach der Energieverbrauch mit der Frequenz an. Wenn über alle Schwingungen bis zu Perioden, die ungefähr der mittleren Zeitspanne zwischen zwei Elementarentladungen entsprechen, summiert wird, kann sich mithin ein recht erheblicher Gesamtbetrag von Energie ergeben, der ständig in dem schwingenden Gebilde verbraucht und dort in Wärme umgesetzt wird. Als Energiequelle kommt hierbei, wie in der ganzen Bilanz der Verstärkerröhren, die zwischen den Elektroden der Entladungsröhre liegende Batterie in Frage; es wird durch den Effekt einfach ein Teil des Energieverbrauches von der Oberfläche der Elektroden nach dem Innern des Schwingungskreises hin verlagert. Die Röhre wirkt also allein wegen der atomistischen Struktur der Elektrizität in einem gewissen Grade als Schwingungserzeuger.

Eine zweite Verallgemeinerung besteht in der Berücksichtigung der *Rückwirkung der Spannungsschwankungen* auf die Größe der Stromschwankungen in der Röhre. Es genüge, hierbei wieder den Fall eines einfachen Schwingungskreises ins Auge zu fassen und darauf hinzuweisen, daß dann die durch den Schroteffekt hervorgerufene Schwingungsenergie nicht, wie es nach Formel (14′) den Anschein hat, bei gegebenem τ mit wachsendem ϑ und L ins Unendliche wächst, sondern einen Höchstwert erreicht, der nur von den inneren Eigenschaften der Röhre und von dem Ausdruck $e i_0/\tau$ abhängt.

Ein Einwand kann gegen die Berechnung der „kleinsten noch wahrnehmbaren Signalenergie“ erhoben werden, den wir nicht unberücksichtigt lassen können, sollen die entwickelten Gedankengänge nicht allzu unvollständig erscheinen. Wir nahmen an, daß ein Signal nicht mehr deutlich wahrnehmbar ist, wenn es im Eingangskreise einer Verstärkeranordnung Spannungsschwankungen hervorruft, die nicht größer sind als die durch Dauerstörungen, z. B. durch den Schroteffekt verursachten. Das gilt aber nur dann, wenn in dem Endkreise der Anordnung Systeme vorhanden sind, die auf dieselbe Frequenz ansprechen wie das Eingangssystem. In der drahtlosen Technik ist z. B. diese Bedingung nicht erfüllt; die Endperioden sind bedeutend länger als die Eigenperiode des Eingangskreises, die Gefahren der hohen Frequenzen treten dann nicht in dem Maße auf, wie es nach Formel (15) den Anschein haben müßte.

Zur Klarlegung der Verhältnisse betrachten wir gleich den Extremfall sehr langer Endperioden. Werden die Schwingungen im Eingangskreise genügend verstärkt und hinter der Anordnung z. B. mit einem Hitzdrahtinstrumente gemessen oder gleichgerichtet und am Galvanometer abgelesen, so ist klar, daß der Unterschied in den Dauerausschlägen ohne und mit konstanter Signalerregung von derselben Größenordnung sein müßte, gleichgültig, ob Dauerstörungen vorhanden sind oder nicht. Nur die Nullstellung des Zeigers würde verschoben sein, und man könnte glauben, durch eine Kompensationsmethode den Einfluß der Dauerschwingungen im Eingangskreise überhaupt auszuschalten.

In der Tat ist hiermit ein Weg gewiesen, die Störungen durch den Wärme- und Schroteffekt weitgehend zu beseitigen und bedeutend kleinere Signalenergien als die durch die Formeln (2) und (15) angegebenen wahrnehmbar zu machen. Aber auch diese Möglichkeit hat ihre Grenzen. In der Natur des ganz unregelmäßigen Charakters des Schroteffektes liegt es, daß auch innerhalb größerer Perioden Schwankungen in der mittleren Intensität auftreten; die Nadel des Ableseinstrumentes würde also nicht ganz ruhig stehen, sondern mit ihrer eigenen Periode Schwankungen ausführen, die die Ablesung wesentlich kleinerer Dauereffekte unmöglich machen würde. Auch in diesem Falle muß also ein Minimalwert für die noch ungestört aufnehmbare Energie existieren. Unter der Annahme, daß das Endinstrument die Energien im Eingangskreise während einer großen Periode P mittelt, ergibt eine angenäherte Überlegung, daß die dann noch ungestört aufnehmbaren Minimalleistungen sich von den durch Formel (15) wiedergegebenen durch den Faktor $\sqrt{\tau/P}$ unterscheiden. Hierbei bedeutet τ wieder die Eigenperiode des Eingangskreises, und es ist vorausgesetzt, daß P groß gegen die Abklingzeit des Eingangskreises ist. Für lange Endperioden (Größenordnung 10 Sekunden) erniedrigt sich also die wahrnehmbare Minimalenergie von Signalen im Gebiete der Hörfrequenz bis zu drahtlosen Frequenzen noch um das Hundert- bis Zehntausendfache.

Zusammenfassung.

1. Infolge der Wärmebewegung treten in elektrischen Schwingungskreisen Dauerschwingungen von geringer Amplitude auf, die sich bei genügend hoher Verstärkung bemerkbar machen müßten und sehr schwache Signale überdecken würden.

2. Die Energie dieser Wärmeschwingungen ist in allen Systemen, die sich angenähert im Wärmegleichgewicht befinden (z. B. metallische Leiter) gleich $k \cdot T$, also unabhängig vom Material sowie von der Größe der elektrischen Elementarladung.

3. Es wird die Leistung, welche zur Aufrechterhaltung einer Schwingung von der mittleren Energie der Wärmeschwingung notwendig ist, berechnet und unter gewissen Bedingungen der kleinsten Signalleistung gleichgesetzt, die durch eine Verstärkerschaltung noch störungsfrei verstärkt werden kann. Die so berechnete Minimalleistung liegt einige Zehnerpotenzen unter den mit den gebräuchlichen Verstärkerschaltungen noch aufnehmbaren minimalen Leistungen. Sie ist desto kleiner, je kleiner die Dämpfung des in Betracht kommenden Schwingungskreises ist.

4. Andere Gesetze gelten für die Schwingungserregung, sobald Systeme mit ins Spiel kommen, bei denen die Bewegung der elektrischen Elementarteilchen nicht mehr quasithermisch ist. Es wird der entgegengesetzte Grenzfall der unendlich großen freien Weglängen behandelt, wie er in sehr verdünnten Gasen und bei Hochvakuum-Glühkathodenentladungen realisiert ist.

5. Bei dieser Gruppe von Erscheinungen, die unter dem Namen des Schroteffektes zusammengefaßt werden, sind die mittleren Stromschwankungen durch die Zahl der voneinander unabhängigen Elementarladungen, im einfachsten Falle durch die Größe des elektrischen Elementarquantums, bestimmt. Für eine gegebene Periode τ wird in angenäherter Rechnung die Amplitude des in einem mittleren Entladungsstrome i_0 enthaltenen Wechselstromes der Periode τ zu $\sqrt{e\, i_0/\tau}$ ermittelt, wobei e die bei einem unabhängigen Elementarvorgang von einer Elektrode zur anderen transportierte Ladung bedeutet.

6. Für einen besonderen, in der Verstärkertechnik wichtigen Fall wird die Rechnung streng durchgeführt. Es wird

die mittlere Energie eines Schwingungskreises berechnet, der parallel zu einer Entladungsröhre liegt. Die mittlere Energie dieser durch den Schroteffekt hervorgerufenen Schwingung ist, in angenäherter Übereinstimmung mit 5, ebenso groß, als ob in dem Entladungsstrome i_0 eine Wechselstromkomponente von der Amplitude $\sqrt{\pi}\,\sqrt{e\,i_0/\tau}$ vorhanden wäre. τ bedeutet hierbei die Eigenperiode des Schwingungskreises.

7. Es wird auf eine Methode hingewiesen, um aus der Messung der durch den Schroteffekt hervorgerufenen und dann verstärkten Schwingungen die Größe des elektrischen Elementarquantums zu ermitteln.

8. Die mittlere Leistung, welche zur Aufrechterhaltung der Schroteffektschwingungen notwendig ist, wird wieder in Beziehung gesetzt zur kleinsten noch ungestört wahrnehmbaren Signalenergie. Es ergibt sich, daß der Schroteffekt die wahrnehmbare Minimalleistung noch beträchtlich enger begrenzt als der Wärmeeffekt. Er kann bereits bei den gebräuchlichen Verstärkungszahlen zu Störungen Anlaß geben.

9. Die dem Schroteffekt entsprechende Leistung und damit die kleinste noch wahrnehmbare Signalenergie zeigt bei einem einfachen Schwingungskreise folgende Abhängigkeiten: Sie wächst mit der dritten Potenz der Eigenfrequenz, mit der ersten Potenz der Abklingzeit und proportional der Selbstinduktion des Schwingungskreises. Ferner ist sie dem mittleren Entladungsstrome und der Größe der Elementarladung proportional.

10. Es wird der Einfluß einer Rückwirkung der Schwingungen auf den Entladungsstrom, ferner der Fall mehrfacher Eigenschwingungen kurz behandelt und schließlich bemerkt, daß sich die Größe der auftretenden Stromschwankungen durch Verwendung träger Endinstrumente um einige Zehnerpotenzen herabdrücken läßt.

Charlottenburg, den 26. Juni 1918.

(Eingegangen 1. Juli 1918.)