Einen wie wesentlichen Einflufs dagegen andererseits das der Christoffel'schen Formel hinzugefügte Glied $B\frac{C''}{l^4}$ hat, ersieht man aus den Differenzen Δ_{II} bei deren Berechnung (aufser $K=0$ auch) $C''=0$ angenommen ist [1]).

(Schlufs im nächsten Heft.)

II. *Ueber das Tönen erhitzter Röhren und die Schwingungen der Luft in Pfeifen von verschiedener Gestalt; von Dr. Carl Sondhaufs.*

Realschul-Director zu Neifse.

Wenn man an eine Glasröhre von etwa zwei Millimetern Weite und 100 bis 200 Millimetern Länge eine Kugel von zweckmäfsiger Gröfse bläst, so hört man oft, sobald man den Mund von der Röhre zurückzieht, einen lauten durch die Schwingungen der Luft in der Röhre erzeugten Ton, welcher so lange anhält, als die Kugel heifs genug ist, und durch das Erhitzen der Kugel wieder zum Ansprechen gebracht werden kann. Bei der Anwendung von etwas weiteren Glasröhren mufs man die Röhre unmittelbar an der Kugel durch Ausziehen verengen, um damit einen zur Erzeugung des Tons geeigneten Apparat zu Stande zu bringen. Ich habe diese Erscheinung, welche sich beim Glasblasen manchmal zufällig darbietet, schon während meiner Universitätsjahre bemerkt und damals schon die Fertigkeit, solche tönende Röhren anzufertigen, erworben. Nachdem Pinaud (*l'Institut* No. 131, *p.* 366 und Pogg. Ann. XLII, S. 610 1837) und C. Marx (Erdmann's Journ. f. prakt.

1) Von weiteren Substanzen sind unter andern mehr oder weniger vollständig berechnet worden: Flintglas von Dutirou, Merz und (Flintglas Clement) von Mascart, Topas von Rudberg, Aether, Jodmethyl und Jodäthyl von Gladstone. Ich halte jedoch die bisher gegebenen Tabellen für mehr als ausreichend.

Chemie Bd. XXII, S. 129 1841) über diese Tonerzeugung ihre Beobachtungen und Ansichten veröffentlicht hatten, widmete ich derselben eine sorgfältige Untersuchung, deren Resultate in der Abhandlung: »Ueber die Schallschwingungen der Luft in erhitzten Glasröhren und in gedeckten Pfeifen von ungleicher Weite«[1]) niedergelegt sind. Diese jetzt beinahe schon 20 Jahre alte Arbeit, in welcher ich allerdings nur eine einzelne Erscheinung studirt, aber, wie ich glaube, sorgfältig und ziemlich erschöpfend behandelt habe, schien dadurch eine etwas weitergehende Bedeutung zu gewinnen, dafs es mir gelang, das Gesetz über die Abhängigkeit der erzeugten Töne von den Dimensionen der Apparate zu ermitteln, wodurch es möglich wurde, die Schwingungszahlen der Töne aus der Länge und Weite der Röhre und dem Volumen der angeblasenen Kugel zu berechnen. Die Anzahl der Schwingungen, welche die Luft in Folge der Erhitzung der Kugel in einem solchen Apparate macht, steht nämlich im geraden Verhältnifs zu der Quadratwurzel aus dem Querschnitt der Röhre und im umgekehrten Verhältnisse zu den Quadratwurzeln aus dem Volumen der Kugel und der Länge der Röhre. Die Schwingungszahl des Tons n wird also hiernach durch die Formel

$$n = C\sqrt{\frac{S}{VL}} \qquad \text{I.}$$

ausgedrückt, in welcher S den Querschnitt, L die Länge der Röhre, V das Volumen der Kugel und C eine Constante bedeutet, deren mittleren Werth ich gleich 104400 fand[2]). Dieser Werth der Constanten ist nach meiner damaligen Auffassungsweise auf die Anzahl der halben Schwingungen, welche der Ton in der Secunde macht, bezogen; wenn man dagegen, wie es jetzt üblich ist, die hin- und hergehende Bewegung des tönenden Körpers als *eine* Schwingung ansieht, also die ganzen Schwingungen zählt, so ist $C = 52200$. In meinen ersten Arbeiten sind die Schwingungszahlen der Töne nach der alten Auffassungsweise an-

1) Pogg. Ann. Bd. 79, S. 1, 1850

2) A. a. O. S. 26.

gegeben und müssen daher sämmtlich durch 2 dividirt werden, um sie mit der jetzt üblichen Zählart in Uebereinstimmung zu bringen.

Die erwähnte Formel erwies sich schliefslich innerhalb gewisser Gränzen auch als brauchbar zur Berechnung der Schwingungszahlen der Töne, welche man durch Anblasen gedeckter Pfeifen von flaschenförmiger Gestalt erhält, wie ich durch eine Anzahl Versuche nachgewiesen habe [1]). Allgemeine Gültigkeit kann der Formel hier allerdings nicht beigelegt werden, denn sie stimmt nur so weit mit der Erfahrung überein, als der Querschnitt der Röhre im Vergleich zu ihrer Länge und zu der Gröfse der Kugel klein ist. Wenn man nämlich in der Formel $V = 0$ oder $L = 0$ setzt, so wird n unendlich grofs, während der Apparat nach dieser Annahme sich zu einer an dem einen Ende geschlossenen Röhre oder zu einer kubischen Pfeife gestaltet, deren Töne unter allen Umständen ganz bestimmte endliche Schwingungszahlen haben. Auf diesen Umstand hat namentlich G. Wertheim in seiner Abhandlung: »Ueber die Schallschwingungen der Luft« [2]) aufmerksam gemacht. Dieser deutsche Forscher, dessen plötzlicher Tod 1861 die wissenschaftliche Welt in Trauer versetzt hat, beschäftigte sich ziemlich zu derselben Zeit in Frankreich, dem Vaterlande Savart's, mit der Lösung ähnlicher akustischer Probleme. Die von ihm aufgestellten Formeln stimmen mit seinen sehr umfangreichen Versuchen überein, sind aber zum Theil sehr complicirt und sind von den Physikern nicht als Ausdruck des Naturgesetzes anerkannt worden. Die Versuche von Zamminer [3]), welche, da sie zum Theil mit Hülfe eines Weber'schen Monochords ausgeführt worden sind, mit dem Anspruch auf grofse Genauigkeit auftreten konnten,

1) A. a. O. S. 32, Tabelle VII.

2) *Ann. de Chim. et Phys.* 3. *série t. XXXI*, *p.* 385 und Journ. für Physik und physikalische Chemie des Auslandes von Dr. A. Krönig 2. Bd., S. 485.

3) Ueber die Schwingungsbewegung der Luft in Pogg. Ann. Bd. XCVII, S. 173, 1856.

lieferten schätzenswerthe Beiträge zur Kenntnifs der Luftschwingungen, aber auch nicht die Mittel, die Schwingungszahlen der Pfeifen genau zu berechnen. Das unschätzbare Werk von H. Helmholtz »Die Lehre von den Tonempfindungen«, welches ein Ergebnifs in der Geschichte der Akustik bildet, ist nicht auf die Ermittelung solcher Einzelnheiten gerichtet.

Die Tonerregung durch Wärme, welche jedenfalls dadurch interessant ist, dafs sie ein Mittel gewährt, Luftsäulen von der Stelle der kleinsten Bewegung aus, wo also die gröfste Verdichtung und Verdünnung abwechselnd stattfindet, in stehende Schwingungen zu versetzen, ist überhaupt seit jener Zeit nicht beachtet worden, denn ich finde sie fast nirgends erwähnt. Ich gestatte mir daher, dieselbe wieder in Erinnerung zu bringen, indem ich einen Nachtrag zu der früheren Arbeit liefere, und freue mich, zugleich auch die damals aufgestellte Formel für die Schwingungszahlen jetzt von der ihr anhaftenden Beschränkung befreit produciren zu können.

1. *An beiden Enden offene Röhren, welche durch Wärme zum Tönen gebracht werden.* Ich habe den Gedanken lange mit mir herumgetragen, dafs es möglich seyn müsse, Apparate anzufertigen, welche sich zu den früher von mir construirten durch Wärme tönenden Röhren so verhielten wie offene Pfeiffen zu gedeckten, dafs also eine an beiden Enden offene Glasröhre, in deren Mitte eine Erweiterung von zweckmäfsiger Gröfse ausgeblasen wird, tönen müsse, wenn die Erweiterung hinreichend erhitzt wird. So wie nämlich in den alten aus einer Kugel und einer Röhre bestehenden Apparaten die eingeschlossene Luftsäule von der Kugel aus in Folge des durch die Erhitzung derselben gestörten Gleichgewichts nach dem offenen Ende der Röhre hin in Schwingung versetzt wird, so meinte ich, müfste auch in einem Apparate, welcher aus einer mit zwei Röhren versehenen Kugel besteht, die Luft von einer in der Kugel sich bildenden Knotenfläche aus nach beiden Seiten hin oscilliren, wenn

nur die zweckmäfsigen Dimensionen getroffen wären und die Kugel hinreichend erhitzt würde.

Das Gelingen des Vecsuchs bestätigte diese Ansicht; doch war die erste Ausführung desselben schwieriger als bei den früher untersuchten Apparaten, obwohl dazu nichts erforderlich ist, als die Mitte einer etwa zwei Millimeter weiten Glasröhre so lange durch Ausblasen zu erweitern, bis sie tönt, wenn beide Enden offen sind. Ich bin mit dem Versuche zuerst zu Stande gekommen, indem ich aus etwas weiteren Glasröhren von nicht zu dünner Wand Kugeln von verschiedener Gröfse blies, welche mit zwei durch das Ausziehen der Röhre erhaltenen engen Röhrchen oder Hälsen versehen waren. Die Hälse wurden dann so abgeschnitten, dafs die auf beiden Seiten der Kugel übrig bleibenden Stücke möglichst gleich waren. An dieselben wurden kleine durchbohrte Pfröpfchen angepafst und mittelst derselben noch zwei Glasröhren von gleicher Weite und Länge luftdicht angefügt. Der auf diese Weise hergestellte Apparat bildete im Ganzen also eine offene Röhre, in deren Mitte sich eine Kugel befand und welche auf beiden Seiten der Kugel verengt war. Die Dimensionen des Apparats wurden nun durch Verkürzen der beiden Hälse und durch Ansetzen anderer Röhren von verschiedener Weite und Länge abgeändert, bis bei dem Erhitzen der Kugel der Ton entstand.

Der mit diesen erhitzten offenen Röhren erzeugte Ton ist hinreichend laut und deutlich, so dafs man ihn im ganzen Zimmer hört, und überhaupt in Allem dem Tone der früher betrachteten nur an einer Seite offenen Apparaten ähnlich. Seine Höhe ist eine bestimmte und hängt von den Dimensionen des Apparats in der Weise ab, dafs dieselbe zunimmt, wenn die Kugel kleiner wird, und die an derselben befindlichen Hälse verkürzt werden. Die schon von Pinaud gemachte Bemerkung, welche ich bei meiner früheren Untersuchung bezüglich der alten Apparate bestätigt fand, dafs nämlich die Anwesenheit von Dämpfen in den durch Erhitzung tönenden Apparaten die Erzeugung des Tons begünstigt und in sehr vielen Fällen bedingt, gilt für die neuen an beiden Seiten offenen Apparate ebenfalls. Man kann daher Apparate, welche, obwohl sie zweckmäfsig construirt zu seyn scheinen, nicht tönen wollen, dadurch zum Ansprechen bringen, dafs man sie inwendig befeuchtet, etwa mittelst eines langen engen Röhrchens einen Tropfen Wasser in die Kugel einführt. Wenn man dieses Hülfsmittel anwendet, mufs man darauf achten, dafs die an der Kugel sitzenden engen Röhrchen nicht durch Wassertröpfchen, welche sich dort aus den sich condensirenden Dämpfen leicht bilden, verschlossen werden, weil dadurch die Entstehung des Tons gehindert wird. Ist blos das eine Röhrchen auf diese Weise verschlossen, so entsteht oft ein tieferer Ton, welcher dem Tone einer gedeckten Pfeife entspricht, und welcher in den höheren Ton der beiderseits offenen Röhre übergeht, wenn das sperrende Wassertröpfchen beseitigt wird.

Um von den auf die angegebene Weise construirten Apparaten eine bessere Vorstellung zu geben, will ich den gröfsten und kleinsten derselben durch Angabe der Dimensionen näher beschreiben. Die kugelige Erweiterung des gröfsten Apparats, hat keine regelmäfsige Gestalt, besonders nachdem sie bei dem wiederholten Gebrauche etwas zusammengeschmolzen ist; ich möchte sie einem Umdrehungs-Ellipsoïde vergleichen, welches in der Axe 2,5 Centimeter lang ist und im Aequator 2 Ctm. Durchmesser hat. Die beiden an der Kugel sitzenden Röhrchen, welche nicht cylindrisch sind, sondern sich nach der Kugel hin erweitern, möchte ich 2 Millimeter weit und 4,5 Centimeter lang schätzen. Die an diese Röhrchen mit kleinen durchbohrten Korken befestigten beiden Röhren sind 8 Millimeter weit und 37 Centimeter lang. Der Apparat, welcher im Ganzen etwa 85 Ctm. lang ist, spricht nur an, wenn er inwendig befeuchtet wird, giebt aber dann einen lauten und deutlichen Ton, welcher dem kleinen *f* am nächsten kommt.

Der kleinere Apparat ist zusammengesetzt aus einer mit zwei kaum 1 Millimeter weiten und wenig über 2 Centimeter langen Röhrchen versehenen Kugel von ungefähr einem Centimeter Durchmesser und zwei mit Pfröpfchen angesetzten Röhren von nicht ganz 6^{mm} Weite und reichlich 11^{cm} Länge. Er läfst ohne innere Befeuchtung das zweigestrichene *d* hell und deutlich hören, wozu aber eine so bedeutende Erhitzung der Kugel nothwendig ist, dafs das Glas weich zu werden anfängt.

Solche Apparate sind hinreichend geeignet, die Ueberzeugung zu gewähren, dafs die in einer offenen Röhre enthaltene Luftsäule durch starke Erhitzung in der Gegend der Knotenfläche in stehende Schwingungen versetzt werden kann, zum Nachweise des Schwingungs-Gesetzes sind sie aber wegen der Unregelmäfsigkeit ihrer Gestalt nicht brauchbar. Defshalb hatte ich mich auch bei der früheren Untersuchung zur Ermittelung des Schwingungsgesetzes nur solcher tönender Kugeln bedient, die mit einer cylindrischen Röhre versehen waren, und es war daher schon defshalb nothwendig, solche Apparate mit zwei cylindrischen Röhren zu Stande zu bringen, damit ich die mit den alten Apparaten gefundenen Resultate auf die neuconstruirten anwenden konnte. Glücklicher Weise gelang es mir schliefslich, cylindrische Glasröhren in ihrer Mitte so weit zu Kugeln auszu blasen, dafs die Apparate in Folge der Erhitzung der Kugel tönten. Da ferner zu erwarten war, dafs auch Apparate aus anderem Material z. B. aus Porcellan oder Metall zu dem Versuche geeignet seyn würden, sobald sie die richtigen Dimensionen haben, liefs ich nach dem Muster eines gut tönenden gläsernen Apparats ähnliche Apparate aus Eisenblech anfertigen, welche sich für diese Erscheinung interessiren möchten, zur Anfertigung solcher hartgelötheten Apparate aus Eisenblech unsern Mechanikus Hrn. Rauch in Neisse bestens empfehlen, da derselbe schon einige Erfahrung besitzt und das Instrument um so besser und billiger herstellen wird, je mehr Bestellungen an ihn gelangen. Diese metallenen Apparate haben vor den gläsernen sogar manche Vorzüge, denn man braucht wegen des festen Materials nicht vorsichtig mit ihnen umzugehen und hat bei

Anwendung von grofser Hitze nicht die Veränderung der Kugel durch Zusammenschmelzen zu fürchten.

Bezüglich der Haltung dieser offenen Apparate während der Versuchs, mögen sie aus Glas oder Eisen bestehen, habe ich zu bemerken, dafs sie nur tönen, wenn die cylinderischen Röhren horizontal gehalten werden. Wenn der Apparat in dieser Lage durch Erhitzen der Kugel zum Tönen gebracht ist, so hört der Ton sogar sofort auf, wenn man das Rohr senkrecht hält, und tritt dann in der Regel wieder von selbst ein, wenn man die Röhre in die horizontale Lage zurückbringt. Der Grund dieser im ersten Augenblicke auffallenden Erscheinung ist ohne Zweifel folgender. In der senkrecht gehaltenen offenen Röhre entsteht in Folge der Erwärmung der Kugel ein aufwärtsgehender Luftzug, welcher die heifse Luft aus der Kugel in die obere Röhre führt und durch die untere Röhre kalte Luft zutreten läfst, so dafs die zur Erzeugung des Tons erforderlichen Temperatur-Differenz der Luft in der Kugel und den Röhren nicht zu Stande kommen kann und der Apparat nicht anspricht. Hat man den Apparat in der horizontalen Lage schon zum Tönen gebracht und hält ihn dann vertikal, so hebt der sofort entstehende Luftzug die Bedingungen für die Fortdauer des Tons auf, dagegen kommen dieselben, wenn nur die Kugel noch heifs genug ist, bald wieder zur Geltung, sobald der Luftzug durch die Wiederherstellung der horizontalen Lage beseitigt wird. In den alten, nur aus einer Kugel und einer Röhre bestehenden Apparaten kann ein solcher Luftzug nicht entstehen, daher dieselben auch bei jeder beliebigen Haltung tönen.

2. *Ueber die Schwingungsweise der Luft in den offenen Apparaten.* Wenn ein Körper in zwei durch eine Knotenfläche getrennten Theilen schwingen soll, so müssen dieselben mit gleicher Geschwindigkeit oscilliren. Es mufs also die in den betrachteten offenen Apparaten enthaltene Luftsäule sich so eintheilen, dafs die zu beiden Seiten der Knotenfläche in der Kugel vorhandenen Luftvolumina mit der Luft in je einer der beiden Röhren in der Secunde gleich

viel Schwingungen machen. Sind die beiden an der Kugel sitzenden Röhren genau von gleichem Querschnitt und von gleicher Länge, so halbirt die Knotenfläche das Luftvolumen in der Kugel und die gleichzeitigen Schwingungen der halbkugligen Luftvolumina erzeugen mit den ihnen anliegenden Luftsäulen in den Röhren denselben Ton, den eine mit einer einzigen eben solchen Röhre versehene Kugel von gleichem Inhalt mit einer der Halbkugeln erzeugen würde. Man kann also die für die Schwingungszahl der früher untersuchten Töne der alten Apparate geltende Formel I auch benutzen, um die Schwingungszahl der von den beiderseits offenen Apparaten erzeugten Töne zu berechnen. Man braucht in dieser Formel statt V nur $\frac{V}{2}$ zu setzen, um die für die neuen Apparate geltende Formel

$$n = C\sqrt{\frac{2S}{VL}} \qquad \text{II.}$$

zu erhalten. V ist in derselben das Volumen der ganzen Kugel und L und S sind die Länge und der Querschnitt von jeder der beiden Röhren. Die Constante C wird von dem früher bestimmten und angewendeten Zahlwerthe 52200 wenig verschieden, aber doch etwas gröfser seyn, weil die kubische Erweiterung der gedeckten flaschenförmigen Pfeife eine bedeutende Gestaltsveränderung erfahren hat, indem jetzt der mit der Luftsäule in der Röhre schwingende Körper eine Halbkugel ist, während die Constante C in der alten Formel sich auf Kugeln bezieht.

Obwohl es am einfachsten und zweckmäfsigsten ist, die Apparate so einzurichten, dafs die beiden Röhren congruent sind, so ist diefs für das Gelingen des Versuchs doch nicht Bedingung, denn der Apparat tönt bei der Erhitzung der Kugel, auch wenn die Röhren ungleich sind, nur darf diese Ungleichheit nicht zu weit gehen. In diesem Falle theilt die Knotenfläche den Luftkörper in der Kugel in zwei ungleiche Theile, von welchen der gröfsere auf der Seite der kürzeren oder weiteren Röhre liegt. Aus der Bedingung, dafs die beiden nach entgegengesetzter Richtung schwingen-den Theile der Luftsäule in der Secunde gleich viele Schwingungen vollenden müssen, ergiebt sich für die Schwingungszahl des Tones eines solchen Apparats die Formel

$$n = C\sqrt{\frac{SL' + S'L}{VLL'}} \qquad \text{III},$$

wo L und S die Länge und den Querschnitt der einen Röhre, L' und S' die Länge und den Querschnitt der andern Röhre und V das Volumen der Kugel bedeuten. Ist nur die Länge oder der Querschnitt der Röhre verschieden, so hat man nur $S = S'$ oder $L = L'$ zu setzen, um die Formeln

$$n = C\sqrt{\frac{S(L + L')}{VLL'}} \text{ und } n = C\sqrt{\frac{S + S'}{VL}} \qquad \text{IV}$$

zu finden, welche die Schwingungszahl für diese Fälle ausdrücken.

Wenn man eine Kugel mit drei oder mehr Röhren anfertigt und die richtigen Dimensionen trifft, so gelingt es auch diesen Apparat zum Tönen zu bringen. Es leuchtet ein, dafs der Luftkörper in der Kugel sich hierbei durch Knotenflächen in ebensoviel Theile theilen mufs, als Röhren vorhanden sind, und dafs alle diese Theilkörper mit den Luftsäulen der in sie mündenden Röhre genau dieselbe Zahl von Schwingungen in der Secunde vollenden müssen. Aus diesem Principe der isochronen Schwingungen der Theile ergiebt sich die nothwendige Anzahl von Gleichungen, um die Volumina der Theile des Luftkörpers in der Kugel und die Schwingungszahl des Tons zu berechnen, welchen der Apparat erzeugt. Sind vier Röhren an der Kugel angebracht, deren Querschnitt mit S, S', S'' und S''' und deren Länge mit L, L', L'' und L''' bezeichnet wird, so ist die Schwingungszahl

$$n = C\sqrt{\frac{\frac{S}{L} + \frac{S'}{L'} + \frac{S''}{L''} + \frac{S'''}{L'''}}{V}} \qquad \text{V}.$$

Wenn nur drei Röhren vorhanden sind, so braucht man nur $S''' = 0$ zu setzen, um den für diesen Fall passenden

Ausdruck zu erhalten. Sind die drei oder vier Röhren congruent, so ist die Schwingungszahl des Tons

$$n = C\sqrt{\frac{3S}{VL}} \text{ oder } n = C\sqrt{\frac{4S}{VL}} \qquad \text{VI.}$$

3. *Nachweis der Richtigkeit der Formeln durch Versuche.* Um die vorgetragene Ansicht über die Schwingungen der Luft in den an beiden Seiten offenen durch Wärme tönenden Apparaten zu prüfen, habe ich die Dimensionen derselben möglichst genau bestimmt und aus denselben mit Anwendung des für die Constante C bei meiner früheren Untersuchung ermittelten Werths 52200 die Schwingungszahlen nach den passenden Formeln berechnet und mit den Schwingungszahlen der beobachteten Töne verglichen. Die gläsernen Apparate wurden, nachdem das eine Ende verstopft worden war, mit Quecksilber gefüllt und zwar zuerst nur die eine Röhre, dann auch die Kugel und zuletzt der ganze innere Raum, so dafs in Folge der genauen Gewichtsbestimmung des die einzelnen Theile füllenden Quecksilbers das Volumen der Kugel und der Querschnitt der Röhren berechnet werden konnte. Die Länge der Röhren wurde mit einem Stangenzirkel gemessen, wobei jedoch insofern eine gewisse Unsicherheit stattfand, als die Röhren von der Kugel nicht scharf abgesetzt waren.

In Beziehung auf die Beobachtung der von den erwärmten Apparaten erzeugten Töne und den Ausdruck derselben durch Zahlen habe ich Folgendes zu bemerken. Da ich nicht die Einrichtungen habe, um die absoluten Schwingungszahlen der beobachteten Töne direct mit hinreichender Genauigkeit zu bestimmen, so begnügte ich mich, mit Hülfe eines einfachen Monochords oder auch einer Violine den musikalischen Ton zu ermitteln, welcher dem zu beobachtenden Tone am nächsten lag, und benutzte die demselben zukommende Schwingungszahl zur Vergleichung mit dem Resultate der Rechnung. Ich habe für die Schwingungszahlen jedoch nicht die Scheibler'sche Stimmung zu Grunde gelegt, nach welcher das eingestrichene a oder a' in der Secunde 400 Schwingungen macht, sondern bin bei der alten Stimmung und Auffassungsweise geblieben, nach welcher die Schwingungszahlen sämmtlicher Töne sich aus dem Verhältnisse 1 : 2 ergeben und die minutiöse Zeiteintheilung bei der Tonempfindung auf die Bewegung des Secundenpendels zurückgeführt wird. Zählt man nämlich die tieferen Octaven, welche das Ohr nicht mehr erfaſst, mit und fängt mit der Betrachtung eines Körpers an, welcher in der Secunde eine Schwingung vollendet, so beginnt die zweite Octave mit zwei Schwingungen, und die Schwingungsverhältnisse oder Töne dieser ersten Octave würde man durch die Bewegung von Pendeln sichtbar darstellen können, welche so oft schwingen, als die Schwingungsverhältnisse angeben. Die Zahlen, welche dieselben ausdrücken, bilden eine stetige geometrische Proportion, welche man findet, wenn man zwischen 1 und 2 elf Glieder interpolirt. Die Schwingungszahlen in den folgenden Octaven ergeben sich dann, wenn man die geometrische Progression, welche mit 1 anfängt und den Namen $\sqrt[12]{2}$ hat, fortsetzt oder die einzelnen Schwingungsverhältnisse der ersten Octave wiederholt mit 2 multiplicirt. Man kann daher die Schwingungszahl jedes beliebigen Tons nach der gleichschwebenden Temperatur bequem als Potenz von 2 ausdrücken. Da man die Progression aber mit jedem beliebigen Gliede anfangen kann, so wird man zweckmäſsiger Weise von dem Grundtone der sogenannten kleinen oder ungestrichenen Octave ausgehen und die folgenden Octaven mit den positiven, die vorhergehenden Octaven mit negativen Indices oder Exponenten ersehen. Bezeichnet $\pm p$ die Zahl der Striche der Octave, in welche der Ton, dessen Schwingungszahl nach der gleichschwebenden Temperatur auszudrücken ist, gehört, und giebt q an, der wievielte Ton in dieser Octave gemeint wird, so daſs also für *c* der Werth von $q = 1$, für *cis* $q = 2$, für *d* $q = 3$ etc. ist, so ist die Schwingungszahl desselben

$$n = \sqrt[12]{2}^{\,\pm 12p + q + 83}$$

Für die Töne in der kleinen Octave ist p natürlich $= 0$.

Soll z. B. die Schwingungszahl für h^3, der 12. Ton in der dreigestrichenen Octave, berechnet werden, so ist $p = 3$ und $q = 12$ und es ergiebt sich $n = \sqrt[12]{2^{131}} = 1933{,}05$. Für es^{-2} oder das Contra-Es ist $p = -2$ und $q = 4$, und die Formel giebt $n = \sqrt[12]{2^{63}} = 38{,}05$. Das eingestrichene a', für welches $p = 1$ und $q = 10$ ist, hat die Schwingungszahl $n = \sqrt[12]{2^{105}} = 430{,}54$. Weshalb die Schwingungszahl dieses Tons gerade ganzzahlig und zwar 440 seyn sollte, ist nicht einzusehen, zumal die Stimmung der Orchester damit auch nicht übereinstimmt. Die in Frankreich eingeführte amtliche Stimmung, nach welcher dieser Ton (a') 437,5 oder 435 ganze Schwingungen in der Secunde machen soll [1]), ist von derjenigen nur sehr wenig verschieden, welche der alten Ausdrucksweise der Töne durch Zahlen entspricht, und die französischen Akademiker hätten dem Normal-A nur 7 resp. 4,5 Schwingungen weniger geben dürfen, um es auf die Schwingungszahl 430,5 einzurichten und dadurch eine naturgemäfse Ableitung des ganzen Reichs der musikalischen Töne von den Schwingungen des Secundenpendels zu erlangen.

Ich bemerke noch, dafs es jedenfalls zweckmäfsiger ist, die tieferen Octaven vor der kleinen Octave mit negativen Exponenten zu bezeichnen, als dazu die grofsen Buchstaben anzuwenden und denselben für die 16füfsige und 32füfsige Octave wieder Striche oder Exponenten beizufügen. Defshalb ist in den nachfolgend mitgetheilten Versuchen und Tabellen die früher von mir geschlagene Bezeichnungsweise der Töne beibehalten.

Die Zahl der Versuche, welche ich anführe, ist nicht grofs; ich halte es hier aber für zweckmäfsiger, wenige genaue Versuche etwas ausführlicher zu beschreiben, als eine gröfsere Menge derselben in einer Tabelle anzuhäufen, zumal da die Anfertigung der Apparate und die Bestimmung ihrer Dimensionen sehr zeitraubend ist.

1) Nach den Angaben von Helmholtz (Lehre von den Tonempfindungen S. 29) und Wüllner (Lehrbuch der Physik Bd. I, S. 516).

1. Versuch.

Der aus grünem ziemlich schwer schmelzbarem Glase angefertigte Apparat ist im Ganzen fast 13 Centimeter lang; die in der Mitte der Röhre ausgeblasene Erweiterung ist keine Kugel, sondern ein Umdrehungs-Ellipsoïd von 13 Millimeter Axe und im Aequator von 11 Millim. Durchmesser, äufserlich gemessen. Die Röhre war fast cylindrisch, indem aus dem Gewicht des Quecksilbers, welches die Röhren auf beiden Seiten der Kugel ausgefüllt hatte, der mittlere Durchmesser der einen Röhre gleich 1,3899 Mllm., der andern gleich 1,3889 Mllm. berechnet wurde. Das aus dem Gewicht des Quecksilbers, welches die Kugel füllte, berechnete Volumen der Kugel betrug 675,35 Kubik-Millimeter. Die Länge der beiden Röhren war 57 Mllm., und der mittlere Querschnitt der einen 1,5150, der andern 1,5172 Quadrat-Millimeter. Sieht man von dieser kleinen Verschiedenheit der Querschnitte ab, so sind beide Röhren völlig gleich, und die Formel II ist zu der Berechnung der Schwingungszahl anzuwenden. Führt man nach derselben die Rechnung mit den Werthen $C = 52200$, $S = 1{,}516$, $V = 675{,}35$ und $L = 57$ aus, so ergiebt sich $n = 463{,}27$. Der Apparat gab bei starker Erhitzung der Kugel den Ton h^1 laut an, dessen Schwingungszahl 483,3 ist. Der Ton, welcher der berechneten Schwingungszahl entspricht, ist also etwas tiefer als der beobachtete, aber um weniger als eine kleine Secunde.

2. Versuch.

Der Apparat ist aus einer ziemlich cylindrischen Glasröhre von weifsem leicht schmelzbarem Glase angefertigt. Aus dem Gewichte des die einzelnen Theile füllenden Quecksilbers ergab sich, dafs die ziemlich unregelmäfsige Erweiterung 2411,1 Cub.-Mllm. Raum enthält und der Querschnitt der einen Röhre 4,0381, der Querschnitt der andern 4,0609 Quadrat-Mllm. grofs ist. Die Länge der einen Röhre beträgt 80, die der andern 81,6 Mllm. Da die Kugel keine starke Hitze aushielt, ohne zusammen zu schmelzen, so wurde die Röhre inwendig befeuchtet und liefs alsdann einen lauten Ton hören, welcher etwas höher als fis[1] war.

Da die beiden Querschnitte sehr wenig verschieden sind, so habe ich beide gleich 4,07 angenommen und die Berechnung nach der oben angegebenen für diesen Fall passenden Formel ausgeführt. Das Resultat war $n = 337,4$. Berücksichtigt man auch die kleine Verschiedenheit der Querschnitte und wendet die Formel III zur Berechnung der Schwingungszahl an, so ergiebt sich $n = 337,5$. Da die Schwingungszahl des beobachteten Tons fis[1] 362,0 ist, so beträgt hier die Differenz zwischen dem Resultate der Beobachtung und der Rechnung etwas mehr als eine kleine Secunde, um welche der der berechneten Schwingungszahl entsprechende Ton zu tief seyn würde.

3. Versuch.

Bei der Bestimmung der Dimensionen des bei diesem Versuche angewendeten Apparats fand sich, dafs die bei seiner Anfertigung verwendete Röhre aus leicht schmelzbarem Glase konisch war. Defshalb ergaben sich für die beiden Röhren, deren Länge beim Abschneiden auch ungleich gerathen war, ziemlich verschiedene mittlere Querschnitte. Die Länge der einen Röhre war $L = 165$ Mllm., ihr mittlerer Querschnit $S = 9,0455$ Quadrat-Mllm., die Länge der andern Röhre $L' = 169$ Mllm. und ihr mittlerer Querschnitt $S' = 7,6662$ Quadrat-Mllm. Das Volumen der Kugel war $V = 3628,4$ Cub.-Mllm. Die Berechnung der Schwingungszahl wurde nach der Formel III ausgeführt und gab den Werth $n = 274$. Der Ton, welcher durch die mäfsige Erhitzung der Kugel bei innerer Befeuchtung des Apparats erzeugt wurde, war laut und anhaltend und etwas höher als c[1]. Der Ton, welcher der berechneten Schwingungszahl entspricht, ist cis[1]. Bei diesem Versuche ist also die berechnete Schwingungszahl etwas gröfser als die des beobachteten Tones, die Differenz beträgt aber kaum eine kleine Secunde.

4. Versuch.

Der angewendete Apparat war aus ungefähr 1 Mllm. starkem Eisenblech construirt. Da er hartgelöthet war, konnte er eine starke Hitze aushalten und gewährte hierbei den Vortheil, dafs seine Kugel dabei ihr Volumen nicht änderte, wie es bei gläsernen Apparaten leicht vorkommt. Dagegen war bei ihm der Nachtheil vorhanden, dafs der Querschnitt der Röhren und der innere Raum der Kugel nicht mit derselben Genauigkeit bestimmt werden konnte wie bei den gläsernen Apparaten. Der Durchmesser der ziemlich richtig gearbeiteten Kugel ist, von Aufsen gemessen, 25 Mllm., der innere Durchmesser ergiebt sich also, wenn man ein Millimeter Metallstärke abrechnet, gleich 23 Mllm., woraus das Volumen der Kugel $V = 6370,6$ Cub.-Mllm. berechnet wird. Der Durchmesser der beiden cylindrischen Röhren ist im Lichten 3,4 Mllm., ihr Querschnitt $S = 9,08$ Quadrat-Mllm., die Länge der Röhren $L = 191$ Mllm. Die mit diesen Werthen nach der Formel II ausgeführte Rechnung lieferte für die Schwingungszahl den Werth $n = 201,6$, welcher dem gis aus der kleinen Octave oder gis^0 entspricht, während der beobachtete Ton, welcher laut und anhaltend durch die Erhitzung der Kugel erhalten wird, wenig höher als g^0 ist.

Ich habe die Vermuthung, dafs die Kugel des Apparats durch die Bearbeitung von ihrer Metallstärke verloren hat, und daher der innere Raum derselben etwas gröfser ist, als bei der Berechnung vorausgesetzt wurde. Wollte man annehmen, dafs die Metallstärke der Kugel nur ein halbes Millimeter beträgt, so würde sich bei der Berechnung des Volumen $V = 7238,2$ und der Schwingungszahl $n = 189,2$ ergeben, welche einem zwischen fis^0 und g^0 liegenden Ton angehört.

5. Versuch.

Es bleibt noch übrig, das oben über das Tönen von Apparaten, bei welchen die Kugel mit mehr als zwei Röhren versehen ist, Auseinandergesetzte durch die Erfahrung zu bestätigen. Zu diesem Zwecke liefs ich aus etwa 1 Mllm. starkem Eisenblech einen besonderen Apparat anfertigen. Derselbe besteht aus einem geraden allseitig geschlossenen Hohlcylinder, dessen Axe ebenso wie der Durchmesser der beiden Grundflächen im Lichten genau 32 Mllm. enthält. In der Mitte der cylindrischen Wand sind vier kurze Röhren von 7 Mllm. Weite und 10 Mllm. Länge so eingelöthet, dafs sie einen gleichen Abstand von 90^0 von einander haben. In diese vier Hälse, welche nach aufsen konisch sind, lassen sich vier eiserne Röhren von 187 bis 188 Mllm. Länge und 3,3 bis 3,4 Mllm. lichter Weite luftdicht einsetzen. Um diefs sicher zu bewerkstelligen, sind die einzusetzenden Enden der Röhren in massive eiserne Kegel eingelöthet, welche in die Hälse gut eingeschliffen sind und vierkantig gefeilte Ränder haben, damit man mit Hülfe einer Zange die Röhren leicht und sicher in Hälse einsetzen und wieder herausnehmen kann. In Folge dieser Einrichtung kann man Röhren von verschiedener Weite und Länge anwenden und den Apparat auch zu Versuchen mit zwei oder drei Röhren und mit einer Röhre gebrauchen. Die übrigen Löcher an dem Cylinder werden dann mit eingeschliffenen metallnen Kegeln verstopft.

Da der Apparat sorgfältig gearbeitet ist, so läfst sich das Volumen des Hohlcylinders mit ziemlicher Genauigkeit berechnen. Es fand sich $V = 25735{,}9$ Cub.-Mllm. Von der kleinen Verschiedenheit der Röhren glaubte ich absehen zu können und nahm die Röhrenlänge $L = 187{,}5$ und ihren Durchmesser $d = 3{,}36$ an, um die Anwendung der complicirten Formel V zu vermeiden. Die Berechnung der Schwingungszahl nach den Formeln I, II und VI lieferte den Werth $n = 70{,}8$ für den Fall, dafs nur eine Röhre in den Hohlcylinder eingesetzt ist und drei Löcher verstopft sind, dagegen ergab sich $n = 100{,}5$, $n = 122{,}6$ oder $n = 141{,}5$, wenn die Fälle in Rechnung gezogen wurden, wo zwei, drei oder alle Röhren eingesetzt sind. Hiernach war zu erwarten, dafs durch die Erwärmung des Hohlcylinders die Töne

d^{-1}, gis^{-1}, h^{-1} und dis^{0} ansprechen würden, wenn der Apparat mit 1 bis 4 Röhren versehen wäre.

Bei der Ausführung des Versuchs zeigte sich zunächst, dafs der Apparat, auch wenn er inwendig befeuchtet war, bei starker Erhitzung des Hohlcylinders nicht tönte, denn nur ab und zu glückte es, eine Tendenz zum Ansprechen wahrzunehmen. Da ich vermuthete, dafs die Röhren zu kurz wären, so setzte ich an dieselben mit passenden durchbohrten Korken Pappröhren von ungefähr 150 Mllm. Länge und 12 Mllm. Weite, und erzielte dadurch das sichere, anhaltende und deutliche Ansprechen der Töne. Solche angesetzte weitere Röhren befördern nämlich das Ansprechen, ohne sonst einen bedeutenden Einflufs auf den Ton, der nur wenig tiefer wird, auszuüben. Wenn der Versuch gut im Gange war, so konnte ich in der Regel eine oder zwei von den Pappröhren, ja wohl auch alle Pappröhren successive abnehmen, ohne dafs der Ton aufhörte. Der Ton wurde hierbei schwächer und etwas höher. Wenn der Apparat mit vier Röhren versehen war, erzeugte er einen so lauten Ton, dafs man denselben über das ganze Zimmer deutlich hören konnte; dagegen war der tiefere Ton, welcher entstand, wenn eine Röhre herausgenommen und dafür ein Metallstöpsel eingesetzt wurde, jedesmal schwächer, und der tiefste Ton, der mit einer Röhre erhalten wurde, war schon so schwach, dafs man das Ohr in die Nähe halten mufste, um ihn noch deutlich zu vernehmen. Er konnte übrigens durch die Resonanz bedeutend verstärkt werden, wenn man die Röhre in den Hals einer grofsen Flasche hielt, welche auf denselben Ton gestimmt war. Ich bemerke noch, dafs der Apparat mit zwei eingesetzten Röhren in gleicher Weise tönte, wenn dieselben einander diametral gegenüber standen oder in zwei benachbarte Löcher eingesetzt waren, also mit einander einen rechten Winkel bildeten.

Der Erfolg des Versuchs stimmte auch in Beziehung auf die Höhe der beobachteten Töne mit meinen Erwartungen überein, denn der Apparat erzeugte mit einer Röhre den

Ton dis^{-1}, mit zwei Röhren a^{-1}, mit drei Röhren c^0 und mit allen vier Röhren d^0.

Ich bemerke noch, dafs ich eine noch bessere Uebereinstimmung der berechneten Schwingungszahlen mit den beobachteten Tönen hätte erhalten können, wenn ich den Werth der Constanten C aus den neuen Versuchen bestimmt und bei der Rechnung benutzt hätte. Die Anwendung des alten Werths $C=52200$, welchen ich vor beinahe 20 Jahren für die alten aus einer Kugel und einer Röhre bestehenden Apparate bestimmt habe, sollte aber den Zusammenhang der früheren Untersuchung mit der jetzigen noch mehr ans Licht stellen und überdiefs nachweisen, dafs die früher von mir gemachte Bemerkung, dafs erhebliche Gestaltsveränderungen kubischer Luftmassen keine grofse Veränderung in ihrer Schwingungsgeschwindigkeit herbeiführen, ihre Gültigkeit noch nicht verloren hat.

4. *Ueber Pfeifen mit kubischer Erweiterung.* Obgleich die in dem Vorangehenden besprochene Tonerzeugung durch Wärme an und für sich von einigem Interesse zu seyn scheint, so dürfte doch die Anwendung der bei ihrer Untersuchung ermittelten Schwingungsgesetze auf die Schwingungen der Luft in den Pfeifen eine gröfsere Bedeutung gewinnen. Es ist schwieriger, eine offene Röhre anzublasen als eine an dem einen Ende geschlossene, und wenn es bei der frühern Untersuchung nur in einzelnen Fällen glückte, die alten mit einer Röhre versehenen Apparate anzublasen, so ist es mir bei den neueren Apparaten überhaupt nicht gelungen, die langen und verhältnifsmäfsig engen Röhren mit dem Munde so anzublasen, dafs die Luft bis in die Kugel erschüttert und in Schwingungen versetzt wurde und der tiefste Ton der Luftsäule entstand. Ich habe übrigens auf das Gelingen des Versuchs nicht grofses Gewicht gelegt, da es doch aufser allem Zweifel ist, dafs die Luft beim Anblasen der Apparate ebenso schwingen mufs, wie bei der Erregung der Schwingungen durch die Wärme. Die Formeln II bis VI können, wenn diese Annahme richtig ist, also auch zu der Berechnung der Schwingungszahlen der

Töne angewendet werden, welche durch das Anblasen von offenen Röhren entstehen, die in ihrer Mitte eine bauchförmige oder kubische Erweiterung haben. Die Anwendbarkeit dieser Formeln ist jedoch durch die Bedingung beschränkt, dafs die Weite der Röhren im Vergleich zu ihrer Länge klein ist, und dafs das Luftvolumen der kubischen Erweiterung die Luftsäulen in den Röhren bedeutend überwiegt. Diese Bedingungen sind bei den Apparaten, welche durch Wärme tönen, immer erfüllt, weshalb die Formeln auf diese Apparate immer anwendbar sind. Dagegen sind die Formeln zu der Berechnung der Schwingungszahlen von Pfeifen mit kubischer Erweiterung gerade dann unbrauchbar, wenn der Ton der Apparate durch Anblasen am leichtesten und sichersten erzeugt wird, d. h. wenn die an dem kubischen Theile der Pfeife angebrachten Röhren kurz und von verhältnifsmäfsiger Weite sind. Die Formeln sind also bei ihrer Anwendung derselben Beschränkung unterworfen wie die ursprüngliche Formel

$$n = C\sqrt{\frac{S}{\sqrt{L}}},$$

von welcher sie abgeleitet sind.

Bei meinen Bemühungen, zunächst die allgemein gültige, von dieser Beschränkung freie Formel für flaschenförmige Pfeifen zu finden, ist für mich die Ueberzeugung leitend gewesen, dafs sowohl die eben erwähnte für die durch Erwärmung tönenden Apparate gültige Formel als auch die ihr ähnliche Formel

$$n = C \cdot \frac{\sqrt[4]{S}}{\sqrt{V}},$$

welche ich in meiner Abhandlung: »Ueber den Brumm-Kreisel und das Schwingungsgesetz der Luft in kubischen Pfeifen«[1]) für die Schwingungszahl des Tons kubischer Pfeifen aufgestellt habe, richtig sey und das Naturgesetz innerhalb ihrer Gränzen ausdrücke. Diese Ueberzeugung, welche auf der Uebereinstimmung der beiden Formeln mit der Beobachtung beruhte, wurde durch die Berücksichtigung

1) Pogg. Ann. Bd. 81, S. 235 und 247.

und Anerkennung bestärkt, welche meine Formel für die kubischen Pfeifen in der mathematischen Untersuchung des Hrn. H. Helmholtz: »Theorie der Luftschwingungen in Röhren mit offenen Enden« [1]) gefunden hat. Ich war daher der Hoffnung, dafs es eine Formel geben müsse, welche die Einheit meiner beiden Formeln bildete und aus welcher sich dieselben ergeben müfsten, wenn entweder der Querschnitt oder die Länge der Röhre im Vergleich zu den übrigen Dimensionen des Apparats verschwindend klein angenommen würde. Diese Formel für die Schwingungszahl des Tons einer solchen gedeckten Pfeife mit kubischer Erweiterung an dem geschlossenen Ende hat sich schliefslich in folgender Gestalt ergeben:

$$n = \frac{a}{4} \sqrt{\frac{S}{(Vc + LS)(L + \sqrt{S})}} \qquad \text{VII.}$$

In derselben bezeichnet a die Geschwindigkeit des Schalls in freier Luft, S den Querschnitt, L die Länge der cylindrischen oder prismatischen Röhre und V das Volumen der Kugel oder der andersgestalteten kubischen Erweiterung, womit die Röhre auf der einen Seite geschlossen ist. Die Constante c bezieht sich auf die Aenderung der Schallgeschwindigkeit der Luft in abgeschlossenen Räumen, aus welchen die Schallwellen nur einen beschränkten Ausweg haben.

Ich bemerke, dafs ich die Formel VII, welche allen an sie nur zu stellenden Ansprüchen genügt, nicht für eine blofse empirische zur Interpolation brauchbare Formel halte, sondern überzeugt bin, dafs sie den theoretischen Ausdruck des Naturgesetzes bildet. Bei dem Eifer, mit welchem jetzt das Gebiet der mathematischen Physik bearbeitet wird, läfst sich erwarten, dafs es nunmehr auch bald gelingen werde, die Gesetze, welche ich auf experimentellem Wege gefunden habe, durch die Analysis nachzuweisen.

Man kann aus dieser Formel durch specielle Annahmen mehrere andere Formeln ableiten, welche die Schwingungs-

1) A. L. Crelle's Journal für reine und angewandte Mathematik, Fortsetzung von C. W. Borchardt Bd. 57, Heft 1.

zahlen von verschieden gestalteten Pfeifen ausdrücken. Nimmt man an, dafs die mit der kubischen Erweiterung der Pfeife verbundene cylindrische oder prismatische Röhre sehr eng, also S sehr klein ist, so kann man in der Formel VII SL gegen Vc und $\sqrt{S}$ gegen L verschwinden lassen, und erhält dadurch für die Schwingungszahl den Ausdruck

$$n = \frac{a}{4\sqrt{c}} \sqrt{\frac{S}{VL}}, \qquad \text{VIII.}$$

welcher mit der Formel I übereinstimmt und zugleich für die in derselben enthaltene Constante den Ausdruck $\frac{a}{4\sqrt{c}}$ liefert, aus welchem sich c bestimmen läfst.

Macht man die Annahme, dafs $L = 0$ ist, so geht die Formel über in

$$n = \frac{a}{4\sqrt{c}} \cdot \frac{\sqrt{S}}{\sqrt{V}} \qquad \text{IX.}$$

und drückt die Schwingungszahl des Tons einer kubischen Pfeife aus, deren Aufschnittsöffnung S und deren innerer Raum V ist. Die Formel stimmt mit dem Ausdruck, den ich in der schon erwähnten Abhandlung: »Ueber den Brummkreisel und das Schwingungsgesetz der Luft in kubischen Pfeifen« für die Schwingungszahl dieser Pfeifen gefunden habe, vollkommen überein und der Werth der Constanten C ist ebenfalls $\frac{a}{4\sqrt{c}}$.

Der Werth der Constanten c kann also auch aus mit kubischen Pfeifen angestellten Versuchen bestimmt werden was jedenfalls vorzuziehen ist, weil dabei der Einflufs der Temperatur auf die Geschwindigkeit des Schalls berücksichtigt werden kann.

Wenn man die kubische Erweiterung, womit die Röhre geschlossen ist, zusammenschwinden läfst, so wird der Apparat zu einer gedeckten Pfeife. Nimmt man also in Formel VII $V = 0$ an, so findet man den bisher noch unbekannten Ausdruck für die Schwingungszahl des Tons einer an einem Ende geschlossenen cylindrischen oder prismatischen Röhre:

$$n = \frac{a}{4} \sqrt{\frac{1}{L(L + \sqrt{S})}}, \qquad \text{X.}$$

welcher von den Constanten c unabhängig ist.

Aus dieser Formel läfst sich sehr leicht die Formel für die Schwingungszahl des Tons einer an beiden Enden offenen Röhre ableiten, da in derselben die beiden Theile der Luftsäule von der in der Mitte gebildeten Knotenfläche aus mit derselben Geschwindigkeit schwingen, wie in einer gedeckten Röhre von der halben Länge. Wenn L die Länge und S der Querschnitt der offenen Röhre ist, so ergiebt sich für die Schwingungszahl ihres Tons

$$n = \frac{a}{2} \sqrt{\frac{1}{L(L + 2\sqrt{S})}} \qquad \text{XI.}$$

Auch für die Schwingungszahl eines Apparats, welcher aus einer mit zwei Röhren versehenen kubischen Pfeife besteht, läfst sich der Ausdruck ohne Schwierigkeit finden, wenn man die Volumina berechnet, in welche der in der kubischen Erweiterung enthaltene Luftkörper durch die Knotenfläche getheilt werden mufs, damit dieselben mit den in den Röhren enthaltenen Luftsäulen dieselbe Anzahl von Schwingungen in der Secunde machen können. Nach diesem Principe ergiebt sich für die Schwingungszahl des Tons einer solchen offenen Pfeife die Formel

$$n = \frac{a}{4} \sqrt{\frac{(L + \sqrt{S})\, S' + (L' + \sqrt{S'})\, S}{(Vc + SL + S'L')(L + \sqrt{S})(L' + \sqrt{S'})}} \qquad \text{XII.}$$

in welcher V das Volumen der kubischen Erweiterung, S und L den Querschnitt und die Länge der einen, S' und L' den Querschnitt und die Länge der andern Röhre bedeuten und c die oben erwähnte Constante ist. Wenn die beiden Röhren congruent sind, also $S = S'$ und $L = L'$ ist, so ergiebt sich die einfachere Formel

$$n = \frac{a}{4} \sqrt{\frac{2S}{(Vc + 2SL)(L + \sqrt{S})}} \qquad \text{XIII.}$$

Läfst man die beiden Röhren wegfallen, so verwandelt sich der Apparat in eine mit zwei Oeffnungen versehene kubische Pfeife und die Formel XII giebt in Folge der Annahme $L = 0$ und $L' = 0$ für die Schwingungszahl den Ausdruck

$$n = \frac{a}{4\sqrt{c}} \cdot \sqrt{\frac{\sqrt{S} + \sqrt{S'}}{V}} \qquad \text{XIV.}$$

welcher die Gestalt

$$n = \frac{a}{4\sqrt{c}} \cdot \frac{2\sqrt{S}}{V} \qquad \text{XV.}$$

annimmt, wenn die beiden Oeffnungen in der kubischen Pfeife gleich sind. Diese Ausdrücke stimmen mit den Formeln, welche ich in §. 12 der Abhandlung über den Brummkreisel und die kubischen Pfeifen angegeben habe, im Wesentlichen überein.

Nachdem ich, um die Bedeutung der Formel VII hervorzuheben, die daraus abzuleitenden Formeln vorgeführt habe, ist nothwendig, die Richtigkeit derselben durch die Vergleichung mit guten Beobachtungen nachzuweisen.

(Schlufs im nächsten Heft.)

III. *Ueber chromsaure Salze;* *von C. Freese.*

Wenn auch die hervorstechenden Eigenschaften der chromsauren Salze wohl Ursache sind, dafs man schon bald nach ihrem Bekanntwerden sich eingehender mit den Chromaten beschäftigte, so ist bis jetzt doch nur die Untersuchung der für die Praxis wichtigsten chromsauren Salze, also vorzugsweise die der Alkalien und des Bleies zu einem befriedigenden Abschlufs gekommen. Hinsichtlich der übrigen Chromate bietet die Literatur manche zweifelhafte Angabe, manche Lücke dar, weshalb die folgenden Untersuchungen auf Anregung des Hrn. Prof. Rammelsberg von mir ausgeführt wurden.