Astronomische Nachrichten.

Expedition auf der Königlichen Sternwarte bei Kiel.

Herausgeber: Prof. Dr. C. A. F. Peters.

Bd. 86. No. 2052. 12.

Ueber Fehlerbestimmung und Ausgleichung eines geometrischen Nivellements.

1. Bestimmung des mittleren und wahrscheinlichen Fehlers.

In dem „Nivellement zwischen Swinemünde und Berlin. Berlin 1840", ist auf Seite 66 nach Bessel die Gleichung

$$1.\qquad W = \sqrt{w_1 w_1 + w_2 w_2 + w_3 w_3 + \ldots\ldots}$$

als Ausdruck für den wahrscheinlichen Fehler der absoluten Höhe der letzten Station angegeben, wenn man von der Meeresfläche ausgeht; oder, der Höhendifferenz, wenn man irgend eine Station zum Ausgangspunkt macht. Dieser Ausdruck bezieht sich auf die Entfernung von Swinemünde bis Berlin, die auf Seite 111 gleich 213 Kilometer angegeben ist, nimmt aber keine Rücksicht auf die einzelnen Strecken, oder setzt voraus, dass die Strecken einander gleich seien. Da mit der Länge der Nivellementslinie der Fehler wächst, so tritt bei mehreren Nivellements von verschiedener Länge das Bedürfniss hervor, ein Verhältniss der Eehler zu der Länge der Linien festzustellen. Diesem Bedürfniss hat die zweite allgemeine Conferenz der europäischen Gradmessung (Verhandl. Seite 139) durch die Bestimmung abgeholfen:

> „dass der wahrscheinliche Fehler der Höhendifferenz zweier um ein Kilometer entfernter Punkte im Allgemeinen nicht 3^{mm}, und in keinem Fall 5^{mm} überschreiten darf".

Hierbei wird vorausgesetzt, dass die Quadrate der Fehler sich zu einander verhalten wie die zugehörigen Entfernungen *). Bedeutet nun kk das Quadrat des mittleren Fehlers pro Kilometer, und $\mu\mu$ die Summe der Quadrate der Fehler, welche auf den Strecken $s, s_1, s_2 \ldots$ deren Gesammtlänge $= S$ begangen wurden, so findet die nachstehende Gleichung statt:

$$2.\qquad \frac{kk}{1} = \frac{\mu\mu}{S},$$

und daraus folgt der wahrscheinliche Fehler pro Kilometer:

$$w = k\,.\,0{,}6745.$$

Da derselbe die Grösse von 3^{mm} nicht überschreiten soll, so darf k nicht die Grösse von $4^{mm}448$ überschreiten, oder μ darf nicht grösser als $4^{mm}448\sqrt{S}$; und $\mu\,.\,0{,}6745$ nicht grösser als $3^{mm}\sqrt{S}$ werden.

Bezeichnen wir die Längen der Strecken eines Nivellements durch $s, s_1, s_2 \ldots s_{n-1}$; ihre Summe durch S; die Fehlerquadrate dieser Strecken durch $\mu\mu$, $\mu_1\mu_1$, $\mu_2\mu_2 \ldots\ldots$, so erhalten wir nach der Gleichung 2:

$$kk = \frac{\mu\mu}{s};\quad k_1 k_1 = \frac{\mu_1\mu_1}{s_1};\quad k_2 k_2 = \frac{\mu_2\mu_2}{s_2}\ \text{etc.}$$

Die Ausdrücke kk, k_1k_1, $k_2k_2 \ldots\ldots$ sind verschiedene Werthe der Fehlerquadrate pro Kilometer, die bei gleicher Genauigkeit der Messungen sämmtlich einander gleich sein würden. Ihr wahrscheinlichster Werth (kk) ist also das arithmetische Mittel. Wir finden daher

$$3.\qquad (kk) = \frac{1}{n}\left\{kk + k_1k_1 + \ldots\ldots k_{n-1}k_{n-1}\right\}$$
$$= \frac{1}{n}\left\{\frac{\mu\mu}{s} + \frac{\mu_1\mu_1}{s_1} + \ldots\ldots \frac{\mu_{n-1}\mu_{n-1}}{s_{n-1}}\right\}.$$

Ebenso erhalten wir

$$4.\qquad \frac{(\mu\mu)}{S} = \frac{1}{n}\left\{kk + k_1k_1 + \ldots\ldots k_{n-1}k_{n-1}\right\}$$
$$= \frac{1}{n}\left\{\frac{\mu\mu}{s} + \frac{\mu_1\mu_1}{s_1} + \ldots \frac{\mu_{n-1}\mu_{n-1}}{s_{n-1}}\right\}.$$

Aus der letzten Gleichung folgt nun das mittlere Fehlerquadrat der ganzen Nivellementslinie S, nämlich:

$$5.\qquad (\mu\mu) = \frac{S}{n}\left\{\frac{\mu\mu}{s} + \frac{\mu_1\mu_1}{s_1} + \ldots \frac{\mu_{n-1}\mu_{n-1}}{s_{n-1}}\right\}.$$

Vergleicht man diesen Ausdruck mit der allgemeinen Funktion:

$$6.\qquad 2\Omega = p\,vv + p_1 v_1v_1 + \ldots\ldots p_{n-1}v_{n-1}v_{n-1},$$

so findet man $p = \frac{S}{s}$; $p_1 = \frac{S}{s_1}$; $\ldots p_{n-1} = \frac{S}{s_{n-1}}$.

Sollen die Resultate von mehreren grossen Nivellementslinien vereinigt werden, so findet ein ganz analoges Verfahren nach den Gleichungen 4 und 5 statt. Es seien S, S_1, $S_2 \ldots$ die Längen der Nivellementslinien

*) Nivellement de précision de la Suisse. Genève et Bale 1867.

in Kilometern; $(\mu\mu)$, $(\mu_1\mu_1)$, $(\mu_2\mu_2)$.... ihre mittleren Fehlerquadrate, so erhalten wir

$$7. \quad [kk] = \frac{[\mu\mu]}{(S)} = \frac{1}{n}\left\{\frac{(\mu\mu)}{S} + \frac{(\mu_1\mu_1)}{S_1} + \ldots\ldots\right\},$$

wo $(S) = S + S_1 + \ldots.$

Wenn diese grösseren Nivellementslinien zusammenhängen, so dass sie eine fortlaufende Linie (S) bilden, dann ist das mittlere Fehlerquadrat dieser ganzen Linie

$$8. \quad [\mu\mu] = \frac{(S)}{n}\left\{\frac{(\mu\mu)}{S} + \frac{(\mu_1\mu_1)}{S_1} + \ldots.\right\}.$$

Unter Fehler verstehen wir im vorliegenden Fall die Abweichungen vom arithmetischen Mittel. Ist eine Strecke

2 Mal nivellirt, so erhält man 2 Fehler,
3 „ „ „ „ „ 3 „
. .
. .
. .
n „ „ „ „ „ n „

Um nachzuweisen, wie im Allgemeinen das mittlere Fehlerquadrat in allen diesen Fällen gefunden wird, wollen wir von dem einfachsten Fall, von dem doppelt ausgeführten Nivellement, ausgehen. In diesem Fall sind die beiden Fehler augenscheinlich gleich $\pm$ der halben Differenz der beiden Messungen. Es ergiebt sich hieraus sogleich eine noch weiter gehende Vereinfachung, dadurch, dass wir unseren Untersuchungen die ganzen Differenzen der doppelt nivellirten Strecken zu Grunde legen. Wir bezeichnen also die doppelt nivellirten Längen der Strecken in Kilometern durch $s, s_1, s_2 \ldots s_{n-1}$; ihre Summe durch S und ihre Differenzen durch $d, d_1, d_2 \ldots d_{n-1}$, so erhalten wir das mittlere Differenzquadrat (dd) der ganzen Linie nach Gleichung 5:

$$9. \quad (dd) = \frac{S}{n}\left\{\frac{dd}{s} + \frac{d_1 d_1}{s_1} + \ldots. \frac{d_{n-1} d_{n-1}}{s_{n-1}}\right\}$$

und das mittlere Differenzquadrat pro Kilometer

$$10. \quad kk = \frac{(dd)}{S}.$$

Bei dem doppelt ausgeführten Nivellement ist der Fehler v gleich der halben Differenz, also $v = \frac{1}{2}d$ und $vv = \frac{1}{4}dd$, folglich auch das mittlere Fehlerquadrat $\mu\mu = vv = \frac{1}{4}(dd)$. Die Gleichung 9 geht daher über in

$$11. \quad \mu\mu = \frac{S}{4n}\left\{\frac{dd}{s} + \frac{d_1 d_1}{s_1} + \ldots. \frac{d_{n-1} d_{n-1}}{s_{n-1}}\right\}.$$

Diese Gleichung giebt das mittlere Fehlerquadrat der doppelten Messung, ausgedrückt durch die Differenzquadrate. Das mittlere Fehlerquadrat der einfachen Messung ist daher:

$$12. \quad \mu\mu = \frac{S}{2n}\left\{\frac{dd}{s} + \frac{d_1 d_1}{s_1} + \ldots. \frac{d_{n-1} d_{n-1}}{s_{n-1}}\right\}.$$

Dieser Ausdruck ist auch auf Grundlinien anwendbar, die streckenweis doppelt gemessen worden sind.

Um die verschiedenen mittleren Fehlerquadrate von einander zu unterscheiden, bezeichnen wir künftig

das der einfachen Messung durch $(\mu\mu)_1$,
„ „ zweifachen „ „ $(\mu\mu)_2$,
„ „ m-fachen „ „ $(\mu\mu)_m$.

Da $vv = \frac{1}{4}dd$, so ist $2vv = \frac{dd}{2}$. Diesen Werth in die Gleichung 12 gesetzt, giebt das mittlere Fehlerquadrat, welches bei einer einmaligen Messung zu befürchten ist, oder

$$13. \quad (\mu\mu)_1 = \frac{2S}{n}\left\{\frac{vv}{s} + \frac{v_1 v_1}{s_1} + \ldots. \frac{v_{n-1} v_{n-1}}{s_{n-1}}\right\}.$$

Ebenso ergiebt sich aus Gleichung 11 das mittlere Fehlerquadrat der doppelt ausgeführten Messung

$$14. \quad (\mu\mu)_2 = \frac{S}{n}\left\{\frac{vv}{s} + \frac{v_1 v_1}{s_1} + \ldots.. \frac{v_{n-1} v_{n-1}}{s_{n-1}}\right\}.$$

Nachdem wir die mittleren Differenzen und Fehler bei einem doppelt ausgeführten Nivellement gefunden haben, können wir nun zu der allgemeinen Bestimmung dieser Grössen bei einem m Mal wiederholten Nivellement übergehen.

Bezeichnen wir bei einem auf derselben Strecke m Mal wiederholten Nivellement die gefundenen Höhenunterschiede durch

$$a, a_1, a_2 \ldots\ldots a_{m-1},$$

so werden dieselben von nahezu gleicher Grösse sein, weil sie nur um die Fehlerhaftigkeit der Messung von einander abweichen. Zieht man jede dieser Grössen von sich und den übrigen ab, so erhält man mm Differenzen.

$$15. \quad \begin{array}{llll} a - a; & a_1 - a_1; & a_2 - a_2 \ldots & a_{m-1} - a_{m-1} \\ a - a_1 & a_1 - a & a_2 - a_1 \ldots\ldots\ldots\ldots & \\ a - a_2 & a_1 - a_2 & a_2 - a \ldots\ldots\ldots\ldots & \\ \vdots & \vdots & \vdots & \end{array}$$

Erheben wir jede dieser Differenzen zum Quadrat, so erhalten wir in Summa mm Differenzquadrate. Verschiedene dieser Differenzen können Null sein; die in der ersten Horizontalreihe sind aber unter allen Umständen gleich Null. Lassen wir dieselben fort, so bleiben m (m—1) Differenzquadrate übrig. Setzen wir die Summe dieser Quadrate = [dd], so ist das mittlere Differenzquadrat der auf derselben Strecke m Mal wiederholten Messung

$$(\delta\delta)_m = \frac{[dd]}{m(m-1)}.$$

Von diesen Differenzen hat aber die eine Hälfte das positive, die andere das negative Zeichen. Ihre Quadrate kommen daher paarweise doppelt vor. Wir erhalten demnach für die Summe der Differenzquadrate der positiven Differenzen

$$\frac{(\delta\delta)_m}{2} = \frac{[d\,d]}{2m\,(m-1)} \text{ oder}$$

16. $$m\,(m-1)\,\frac{(\delta\delta)_m}{2} = \frac{[d\,d]}{2}.$$

Wenn $a + a_1 + a_2 + \ldots\ldots a_{m-1} = M$, so ist das arithmetische Mittel der m-fach gemessenen Höhenunterschiede $= \frac{M}{m}$. Bilden wir jetzt nach den Gleichungen 15 die Abweichungen vom arithmetischen Mittel (die Fehler), und erheben sie einzeln zum Quadrat, so erhalten wir

$$\left(a - \frac{M}{m}\right)^2; \quad \left(a_1 - \frac{M}{m}\right)^2 \ldots\ldots \left(a_{m-1} - \frac{M}{m}\right)^2$$
$$\left(a - \frac{M}{m}\right)^2 \quad \left(a_1 - \frac{M}{m}\right)^2 \ldots\ldots \left(a_{m-1} - \frac{M}{m}\right)^2$$
$$\left(a - \frac{M}{m}\right)^2 \quad \left(a_1 - \frac{M}{m}\right)^2 \ldots\ldots \left(a_{m-1} - \frac{M}{m}\right)^2$$
$$\begin{matrix} \cdot & & \cdot & & \cdot \\ \cdot & & \cdot & & \cdot \\ \cdot & & & & \cdot \end{matrix}$$
$$m\left(a - \frac{M}{m}\right)^2 + m\left(a_1 - \frac{M}{m}\right)^2 + \ldots m\left(a_{m-1} - \frac{M}{m}\right)^2.$$

Nun ist aber $\left(a - \frac{M}{m}\right) = v$; $\left(a_1 - \frac{M}{m}\right) = v_1$

$$\left(a_2 - \frac{M}{m}\right) = v_2, \ldots \left(a_{m-1} - \frac{M}{m}\right) = v_{m-1}.$$

Vergleichen wir jetzt die Summe der Fehlerquadrate mit Gleichung 16, so finden wir

$$m\,(m-1)\,\frac{(\delta\delta)_m}{2} = m\{v\,v + v_1 v_1 + v_2 v_2 + \ldots v_{m-1} v_{m-1}\}$$

folglich

17. $$\frac{(\delta\delta)_m}{2} = \frac{1}{m-1}\left\{v\,v + v_1 v_1 + \ldots\right\} = \frac{[v\,v]}{m-1}.$$

Bei m-facher Wiederholung der Messung lässt sich also die Summe der Fehlerquadrate mit der Summe der Differenzquadrate durch folgenden Ausdruck vergleichen:

18. $$\frac{[v\,v]}{m-1} = \frac{(\delta\delta)_m}{2} = \frac{[d\,d]}{2m\,(m-1)},$$

wo unter $[d\,d]$ die Summe aller Differenzquadrate ohne Rücksicht auf die Zeichen der Differenzen zu verstehen ist. Mittels dieser Gleichung kann man bei der m-fachen Wiederholung der Messung, ebenso wie es früher bei der doppelten Wiederholung geschehen ist, das mittlere Fehlerquadrat $(\mu\mu)_m$, entweder durch die Fehlerquadrate oder auch durch die Differenzquadrate ausdrücken.

Setzen wir in Gleichung 17 bei doppelter Wiederholung der Messung $m = 2$, so finden wir zur Bestimmung des Fehlerquadrats, welches bei der einfachen Messung zu befürchten ist,

$$\frac{(\delta\delta)_2}{2} = v\,v + v_1 v_1 = 2\,v\,v = \frac{[v\,v]}{1},$$

für $m = 3$ finden wir für die einfache Messung

$$\frac{(\delta\delta)_3}{2} = \frac{1}{2}\left\{v\,v + v_1 v_1 + v_2 v_2\right\} = \frac{[v\,v]}{2},$$

für $m = 4$:

$$\frac{(\delta\delta)_4}{2} = \frac{1}{3}\left\{v\,v + v_1 v_1 + v_2 v_2 + v_3 v_3\right\} = \frac{[v\,v]}{3}.$$

Sind sämmtliche Strecken gleich oft wiederholt, so finden wir für m Wiederholungen auf n Strecken, das mittlere Fehlerquadrat der ganzen Linie, welches bei einmaliger Messung zu fürchten ist:

19. $$(\mu\mu)_1 = \frac{S}{n}\left\{\frac{(\delta\delta)_m}{2\,s} + \frac{(\delta^1\delta^1)_m}{2\,s_1} + \ldots \frac{(\delta_{n-1}\delta_{n-1})_m}{2\,s_{n-1}}\right\}$$
$$= \frac{S}{n}\left\{\frac{[v\,v]}{s\,(m-1)} + \frac{[v_1 v_1]}{s_1\,(m-1)} + \ldots \frac{[v_{n-1} v_{n-1}]}{s_{n-1}(m-1)}\right\}.$$

Um das mittlere Fehlerquadrat der m Mal wiederholten Messung zu finden, hat man nur durch m zu dividiren oder zu setzen:

20. $$(\mu\mu)_m = \frac{S}{m.n}\left\{\frac{[v\,v]}{s\,(m-1)} + \frac{[v_1 v_1]}{s_1\,(m-1)} + \ldots \frac{[v_{n-1} v_{n-1}]}{s_{n-1}(m-1)}\right\}$$

Das mittlere Fehlerquadrat pro Kilometer ist daher:

für die einfache Messung $kk = \frac{(\mu\mu)_1}{S}$,

„ „ m-fache „ $= \frac{(\mu\mu)_m}{S}$.

Sind die verschiedenen Strecken eines Nivellements verschieden oft wiederholt, so wird man für die Bestimmung von kk in der Gleichung 19 jede Strecke mit dem zugehörigen $m-1$ zu multipliciren und $n =$ der Summe der $m-1$ zu setzen haben. Man erhält auf solche Weise:

$$kk = \frac{1}{\Sigma\,(m-1)}\left\{\frac{[v\,v]}{s} + \frac{[v_1 v_1]}{s_1} \ldots + \frac{[v_{n-1} v_{n-1}]}{s_{n-1}}\right\}.$$

Das mittlere Fehlerquadrat der ganzen Messung von $s + s_1 + \ldots + s_{n-1}$ wird

$$= kk\left\{\frac{s}{m} + \frac{s_1}{m_1} + \ldots + \frac{s_{n-1}}{m_{n-1}}\right\}.$$

Die hier in Betracht gezogenen mittleren und wahrscheinlichen Fehler unterscheiden sich aber bekanntlich von denjenigen Fehlern, die sich aus den polygonalen Abschlüssen ergeben. Diese letzteren sollen allein bei den Präcisionsnivellements, laut Beschluss der allgemeinen Conferenz der europäischen Gradmessung (Verhandlungen der 3. allgemeinen Conferenz Seite 96), zu Grunde gelegt werden. Ihr Unterschied besteht darin, dass die ersten aus den Differenzen der wiederholten Beobachtungen als wahrscheinlich hergeleitet werden, während die letzteren an den gefundenen mittleren Höhenunterschieden, als nothwendige Verbesserungen angebracht werden müssen, um die Fehler der Polygonalabschlüsse zu tilgen. Man kann daher diese Fehler auch, im Gegensatz zu den wahrscheinlichen, wirkliche Fehler nennen. Ihre Ermittelung wird uns im Nachfolgenden beschäftigen.

---

2. Ausgleichung eines geometrischen Nivellements.

Im vorhergehenden Abschnitt hatten wir es mit der Bestimmung der Fehler aus wiederholten Beobachtungen zu thun, d. h. mit der Ermittelung der direkten Leistungsfähigkeit der Beobachter und ihrer Instrumente, um darnach die wahrscheinliche Fehlerhaftigkeit der Beobachtungsresultate beurtheilen zu können.

Bei der Ausgleichung eines Nivellements gehen wir aber von den wahrscheinlichsten Resultaten der Beobachtungen aus, und es handelt sich darum, die absoluten Fehler, welche sich durch die Polygonalabschlüsse ergeben, an den wahrscheinlichsten Resultaten so zu verbessern, dass diese Fehler verschwinden, und dass **die Summe ihrer Quadrate ein Minimum wird.** Ich habe früher schon, in dem 1. Heft der wissenschaftlichen Begründung der Rechnungsmethoden des Centralbureaus Seite 61, nachgewiesen, dass die Bessel'sche Methode der Ausgleichung eines trigonometrischen Netzes sich auch auf die Ausgleichung eines Nivellementsnetzes übertragen lässt, und zwar in nachstehender Weise.

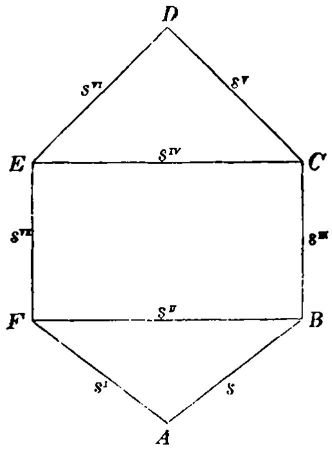
Die allgemeine Funktion, welche zur Bestimmung der wahrscheinlichsten Verbesserungen führt, ist:

21. $$2\Sigma = p\,v\,v + p^{I}\,v^{I}v^{I} + p^{II}\,v^{II}v^{II} + \ldots\ldots$$

Dieselbe, wie sie in Gleichung 6 aufgeführt wurde. Die Gewichte sind dort ebenfalls für eine streckenweis mehrfach abnivellirte Nivellementslinie bestimmt und zwar:

$$p = \frac{S}{s};\quad p^{I} = \frac{S}{s_{,}};\quad p^{II} = \frac{S}{s_2}\ldots\ldots,$$

nur haben wir hier unter v, v^{I}, v^{II} .... nicht, wie dort die Fehler, d. h. die Abweichungen vom arithmetischen Mittel, sondern die Verbesserungen zu verstehen, welche an dem arithmetischen Mittel der gefundenen Höhenunterschiede anzubringen sind, damit die Differenzen der Polygonalabschlüsse getilgt werden. Während wir in der vorigen Nummer die Fehler durch v, $v_{,}$, v_2 ..... bezeichnet haben, unterscheiden wir jetzt die Verbesserungen durch die Bezeichnung v, v^{I}, v^{II} . . .



Nennen wir die den Polygon-Seiten s, s^{I}, s^{II} ..... entsprechenden Verbesserungen v, v^{I}, v^{II} ..... und bezeichnen wir die Differenzen, welche die einzelnen geschlossenen Figuren ergeben, durch D, D^{I}, D^{II}, D^{III}, so liefert die nebenstehende Figur folgende Bedingungsgleichungen:

22. $$\begin{cases} u = o = D - (v + v^{I} + v^{II}) \\ u^{I} = o = D^{I} - (v^{II} + v^{III} + v^{IV} + v^{VII}) \\ u^{II} = o = D^{II} - (v^{IV} + v^{V} + v^{VI}) \\ u^{III} = o = D^{III} - v + v^{III} + v^{V} + v^{VI} + v^{VII} + v^{I} \end{cases}$$

multiplicirt man diese Bedingungsgleichungen mit den willkürlichen Factoren I, II, III und IV, und bildet dann aus den Gleichungen 21 und 22 die Differentialgleichungen, welche Σ zu einem Minimum machen, so erhält man:

$$o = \frac{d\Sigma}{dv} + \frac{du}{dv}\,I + o + o + \frac{du^{III}}{dv}\,IV$$

$$o = \frac{d\Sigma}{dv^{I}} + \frac{du}{dv^{I}}\,I + o + o + \frac{du^{III}}{dv^{I}}\,IV$$

$$o = \frac{d\Sigma}{dv^{II}} + \frac{du}{dv^{II}}\,I + \frac{du^{I}}{dv^{II}}\,II + o + o$$

$$o = \frac{d\Sigma}{dv^{III}} + o + \frac{du^{I}}{dv^{III}}\,II + o + \frac{du^{III}}{dv^{III}}\,IV$$

$$o = \frac{d\Sigma}{dv^{IV}} + o + \frac{du^{I}}{dv^{IV}}\,II + \frac{du^{II}}{dv^{IV}}\,III + o$$

$$o = \frac{d\Sigma}{dv_{V}} + o + o + \frac{du^{II}}{dv^{V}}\,III + \frac{du^{III}}{dv^{V}}\,IV$$

$$o = \frac{d\Sigma}{dv^{VI}} + o + o + \frac{du^{II}}{dv^{VI}}\,III + \frac{du^{III}}{dv^{VI}}\,IV$$

$$o = \frac{d\Sigma}{dv^{VII}} + o + \frac{du^{I}}{dv^{VII}} + o + \frac{du^{III}}{dv^{VII}}\,IV$$

Die erste Vertikalreihe der Differentialquotienten ist nach Gleichung 21 $= v\,p$, $v^{I}p^{I}$, $v^{II}p^{II}$ ..... Die übrigen Differentialquotienten sind nach den Gleichungen 22 sämmtlich $= -1$. Die obigen Gleichungen gehen daher über in:

$$\begin{array}{llcccc}
o = p\,v & & -\mathrm{I} + & o + & o & -\mathrm{IV} \\
o = p^{\mathrm{I}} v^{\mathrm{I}} & & -\mathrm{I} & o & o & -\mathrm{IV} \\
o = p^{\mathrm{II}} v^{\mathrm{II}} & & -\mathrm{I} & -\mathrm{II} & o & o \\
o = p^{\mathrm{III}} v^{\mathrm{III}} & & o & -\mathrm{II} & o & -\mathrm{IV} \\
o = p^{\mathrm{IV}} p^{\mathrm{IV}} & & o & -\mathrm{II} & -\mathrm{III} & o \\
o = p^{\mathrm{V}} v^{\mathrm{V}} & & o & o & -\mathrm{III} & -\mathrm{IV} \\
o = p^{\mathrm{VI}} v^{\mathrm{VI}} & & o & o & -\mathrm{III} & -\mathrm{IV} \\
o = p^{\mathrm{VII}} v^{\mathrm{VII}} & & o & -\mathrm{II} & o & -\mathrm{IV}
\end{array}$$

Aus diesen Gleichungen erhält man nun die Verbesserungen:

$$23.\quad \left\{\begin{aligned}
v &= \frac{1}{p}(\mathrm{I}+\mathrm{IV}) = \frac{s}{S}(\mathrm{I}+\mathrm{IV}) \\
v^{\mathrm{I}} &= \frac{1}{p^{\mathrm{I}}}(\mathrm{I}+\mathrm{IV}) = \frac{s^{\mathrm{I}}}{S}(1+\mathrm{IV}) \\
v^{\mathrm{II}} &= \frac{1}{p^{\mathrm{II}}}(\mathrm{I}+\mathrm{II}) = \frac{s^{\mathrm{II}}}{S}(\mathrm{I}+\mathrm{II}) \\
v^{\mathrm{III}} &= \frac{1}{p^{\mathrm{III}}}(\mathrm{II}+\mathrm{IV}) = \frac{s^{\mathrm{III}}}{S}(\mathrm{II}+\mathrm{IV}) \\
v^{\mathrm{IV}} &= \frac{1}{p^{\mathrm{IV}}}(\mathrm{II}+\mathrm{III}) = \frac{s^{\mathrm{IV}}}{S}(\mathrm{II}+\mathrm{III}) \\
v_{\mathrm{V}} &= \frac{1}{p^{\mathrm{V}}}(\mathrm{III}+\mathrm{IV}) = \frac{s_{\mathrm{V}}}{S}(\mathrm{III}+\mathrm{IV}) \\
v^{\mathrm{VI}} &= \frac{1}{p^{\mathrm{VI}}}(\mathrm{III}+\mathrm{IV}) = \frac{s^{\mathrm{VI}}}{S}(\mathrm{III}+\mathrm{IV}) \\
v^{\mathrm{VII}} &= \frac{1}{p^{\mathrm{VII}}}(\mathrm{II}+\mathrm{IV}) = \frac{s^{\mathrm{VII}}}{S}(\mathrm{II}+\mathrm{IV})
\end{aligned}\right.$$

Setzt man diese für v, v^{I}, $v^{\mathrm{II}} \ldots.$ gefundenen Werthe in die Bedingungsgleichungen 22, so erhält man die folgenden Endgleichungeu zur Bestimmung der Factoren I, II, III und IV:

$$D = \frac{(s+s^{\mathrm{I}}+s^{\mathrm{II}})}{S}.\,\mathrm{I} + \frac{s^{\mathrm{I}}_{\mathrm{I}}}{S}.\,\mathrm{II} + o \quad + \frac{(s+s^{\mathrm{I}})}{S}.\,\mathrm{IV}$$

$$D^{\mathrm{I}} = \frac{s^{\mathrm{II}}}{S}.\,\mathrm{I} + \frac{(s^{\mathrm{II}}+s^{\mathrm{III}}+s^{\mathrm{IV}}+s^{\mathrm{VII}})}{S}.\,\mathrm{II} + \frac{s^{\mathrm{IV}}}{S}.\,\mathrm{III} + \frac{(s^{\mathrm{III}}+s^{\mathrm{VII}})}{S}.\,\mathrm{IV}$$

$$D^{\mathrm{II}} = o + \frac{s^{\mathrm{IV}}}{S}.\,\mathrm{II} + \frac{(s^{\mathrm{IV}}+s^{\mathrm{V}}+s^{\mathrm{VI}})}{S}.\,\mathrm{III} + \frac{(s^{\mathrm{V}}+{}^{\mathrm{VI}})}{S}.\,\mathrm{IV}$$

$$D^{\mathrm{III}} = \frac{(s+s_{\mathrm{I}})}{S}.\,\mathrm{I} + \frac{(s^{\mathrm{III}}+s^{\mathrm{VII}})}{S}.\,\mathrm{II} + \frac{(s_{\mathrm{V}}+s^{\mathrm{VI}})}{S}.\,\mathrm{III}$$
$$\frac{(s+s^{\mathrm{I}}+s^{\mathrm{III}}+s^{\mathrm{V}}+s^{\mathrm{VI}}+s^{\mathrm{VII}})}{S}.\,\mathrm{IV}$$

Die Auflösung dieser Gleichungen giebt die Werthe der Faktoren I, II, III und IV und setzt man dieselben in die Gleichungen 23, so findet man die Verbesserungen v, v^{I}, $v^{\mathrm{II}} \ldots\ldots$ Bringt man diese Verbesserungen an den Höhenunterschieden der einzelnen Strecken an, so schliesst die ganze Figur ohne Fehler.

Wir haben diese Verbesserungen als wirkliche Fehler angesehen und können jetzt ihr mittleres Fehlerquadrat pro Kilometer eben so bestimmen, wie wir es bei den Abweichungen vom arithmetischen Mittel, oder bei den wahrscheinlichen Fehlern gethan haben. Bezeichnen wir dasselbe pro Kilometer durch $\varepsilon\varepsilon$, so erhalten wir

$$24.\quad \varepsilon\varepsilon = \frac{1}{n}\left\{\frac{v\,v}{s} + \frac{v^{\mathrm{I}} v^{\mathrm{I}}}{s^{\mathrm{I}}} + \frac{v_{\mathrm{II}}\, v_{\mathrm{I}}^{\mathrm{I}}}{s_{\mathrm{I}}^{\mathrm{I}}} + \ldots\ldots \frac{v^{n-1}\, v^{n-1}}{s^{n-1}}\right\}.$$

Das Quadrat des mittleren Fehlers EE für die summarische Länge sämmtlicher Polygonseiten ist daher

$$25.\quad EE = \frac{S}{n}\left\{\frac{v\,v}{s} + \frac{v_{\mathrm{I}}\, v}{s^{\mathrm{I}}} + \ldots\ldots \frac{v^{n-1}\, v^{n-1}}{s^{n-1}}\right\}.$$

Beziehen sich die Verbesserungen v, v^{I}, $v^{\mathrm{II}} \ldots.$ auf ein einfaches Nivellement im Polygon, so ist auch $\varepsilon\varepsilon$ das Quadrat des mittleren Fehlers (mittleren Verbesserung) für das einfache Nivellement. Beziehen sich aber die Verbesserungen auf ein m-faches Nivellement im Polygon, so ist auch $\varepsilon\varepsilon$ das Quadrat der mittleren Verbesserung für das m-fache Nivellement. Wir erhalten daher in diesem Fall das Quadrat der mittleren Verbesserung pro Kilometer, welches wir bei einem einfachen Nivellement zu befürchten haben:

$$\varepsilon\varepsilon = \frac{m}{n}\left\{\frac{v\,v}{s} + \frac{v_{\mathrm{I}}\, v^{\mathrm{I}}}{s^{\mathrm{I}}} + \ldots.\ \frac{v^{n-1}\, v^{n-1}}{s^{n-1}}\right\}.$$

Man kann eine doppelt nivellirte Linie auch als ein Polygon von zwei Seiten ansehen. In diesem Fall geht die allgemeine Gleichung 21 über in

$$2\,\Sigma = p\,v\,v + p^{\mathrm{I}} v_{\mathrm{I}} v_{\mathrm{I}},$$

wo $p = \frac{2\,s}{S} = p_{\mathrm{I}} = 2.$

Nennt man jetzt die beiden gefundenen Höhenunterschiede h und h^{I} und fügt ihnen die Verbesserungen v und v^{I} hinzu, so erhält man die Bedingungsgleichung

$$h + v - h_{\mathrm{I}} - v^{\mathrm{I}} = o = D + v - v^{\mathrm{I}}.$$

Hieraus folgt nach dem Vorhergehenden:

$$o = p\,v + \mathrm{I} = 2\,v + \mathrm{I}, \text{ daher } v = -\tfrac{1}{2}\mathrm{I}$$
$$o = p^{\mathrm{I}} v_{\mathrm{I}} - \mathrm{I} = 2\,v^{\mathrm{I}} - \mathrm{I}, \text{ daher } v_{\mathrm{I}} = +\tfrac{1}{2}\mathrm{I},$$

und aus der Bedingungsgleichung
$o = D - \mathrm{I}$. Daher $D = \mathrm{I}$ und $v = -\frac{1}{2}D$; $v^{\mathrm{I}} = +\frac{1}{2}D$. Die beiden Verbesserungen sind also in diesem Fall $= \pm v =$ den Abweichungen vom arithmetischen Mittel. Wir finden also nach Gleichung 24:

$$\varepsilon\varepsilon = \frac{1}{2}\left\{\frac{v\,v}{s} + \frac{v\,v}{s}\right\} = \frac{v\,v}{s},$$

denselben Ausdruck, den das auf der Strecke s doppelt ausgeführte Nivellement gegeben hat.

Diese Uebereinstimmung zwischen den Verbesserungen und den Abweichungen vom arithmetischen Mittel findet aber nur in dem vorliegenden Falle statt.

Schon bei einem doppelt ausgeführten Nivellement wird der Fehler aus einem Polygonalabschluss kleiner sein, als der, welcher sich bei dem 4-fachen Nivellement einer Linie aus den Abweichungen vom arithmetischen Mittel ergiebt.

Der Forderung unter Gleichung 2, dass der wahrscheinliche Fehler die Grösse von $3^{mm}\sqrt{S}$ nicht überschreiten soll, wird daher durch einen Polygonal-Abschluss leichter genügt werden können, als durch die Abweichungen vom arithmetischen Mittel. Der oben angeführte Beschluss der 3. allgemeinen Conferenz bezweckte aber offenbar eine Verschärfung der Anforderung. Wir werden daher diesen Beschluss vorläufig so deuten müssen, dass der wahrscheinliche Fehler aus einem Polygonal-Abschluss kleiner sein soll, als $3^{mm}\sqrt{S}$, während der aus den Abweichungen vom arithmetischen Mittel diese Grösse nicht überschreiten darf.

Sollte der wahrscheinliche Fehler aus einem Polygonal-Abschluss grösser oder auch nur eben so gross ausfallen, wie bei den Abweichungen vom arithmetischen Mittel, so würde man ungewöhnliche Beobachtungs- oder Instrumentalfehler vermuthen können.

Vorläufig dürfte es vielleicht rathsam erscheinen, die Fehler aus den Polygonal-Abschlüssen getrennt zu halten von denen, die sich aus den Abweichungen vom arithmetischen Mittel ergeben, um Material zur Feststellung des Verhältnisses der beiden Fehler zu sammeln.

Baeyer.

Elements of 36 Andromedae Σ 73.

Node = 57° 54′, λ = 142° 19′, γ = 41° 39′, e = 0.6537, T = 1798.80, P = 349yrs..1, a = 1″54.

	Nr.	Epoch	Θ_0	Θ_c	$\Theta_0 - \Theta_c$	ρ_0	ρ_c	$\rho_0 - \rho_c$
Herschel:	1	1830.78	307° 4′	306°26′	+0°38′	0″90	0″89	+0″01
	2	31.79	308 40	308 14	+0 26	0.77	0.90	—0.13
Smyth:	3	1835.92	315 42	314 48	+0 54	1.1	0.95	+0.15
	4	39.77	318 30	320 17	—1 47	1.1	1.01	+0.09
	5	43.12	322 54	324 34	—1 40	1.0	1.05	—0.05
	6	52.83	335 48	335 10	+0 38	1.3	1.19	+0.11
Dawes:	7	1839.82	317 45	320 21	—2 36	1.08	1.01	+0.07
	8	40.84	319 10	321 43	—2 33	1.11	1.02	+0.09
	9	41.55	320 23	322 37	—2 14	1.05	1.03	+0.02
	10	42.94	322 50	324 20	—1 30	1.01	1.05	—0.04
	11	43.88	323 35	325 29	—1 54	1.12	1.06	+0.06
Fletcher:	12	1851.93	336 23	334 20	+2 3	1.12	1.18	—0.06
Talmage:	13	1865.73	347 2	346 2	+1 0	1.08	1.38	—0.30
	14	66.83	344 12	346 51	—2 39	1.38	1.39	—0.01
	15	69.72	349 28	348 49	+0 39	—	—	—
	16	72.86	347 25	350 49	—3 24	1.24	1.48	—0.24
Struve:	17	1832.14	307 48	308 46	—0 58	0.85	0.90	—0.05
	18	36.90	320 28	316 13	+4 15	0.94	0.97	—0.03
Kaiser:	19	1842.69	323 24	324 2	—0 38	0.99	1.04	—0.05
Mädler:	20	1846.99	329 0	329 9	—0 9	1.26	1.11	+0.15
	21	47.81	330 11	330 3	+0 8	1.19	1.12	+0.07
	22	48.05	329 4	330 18	—1 14	1.28	1.13	+0.15
	23	51.00	333 48	333 25	+0 23	1.40	1.17	+0.23
	24	51.78	334 52	334 11	+0 41	1.315	1.18	+0.135
	25	52.60	335 19	334 57	+0 22	1.35	1.19	+0.16
	26	53.08	337 5	335 24	+1 41	1.43	1.20	+0.23
	27	53.87	336 35	336 11	+0 24	1.28	1.21	+0.07
	28	54.98	336 55	337 13	—0 18	1.42	1.22	+0.20
	29	55.44	336 26	337 38	—1 12	1.34	1.23	+0.11
	30	56.98	339 59	339 3	+0 56	1.35	1.25	+0.10
	31	57.95	340 23	339 52	+0 31	1.41	1.26	+0.15
	32	58.04	340 8	339 58	+0 10	1.34	1.27	+0.07