Die Gleichung für die Berührungspunkte der Doppeltangenten der Curve 4. Ordnung.

Von

J. Freyberg in Dresden.

Im siebenten Bande der Math. Annalen p. 497 ff. hat Hr. Dersch die Aufgabe, eine Curve anzugeben, die durch die Berührungspunkte der Doppeltangenten läuft, mit symbolischer Rechnung behandelt. Nachstehend soll gezeigt werden, dass sich die von ihm erhaltenen Resultate für Curven 4. Ordnung vereinfachen lassen, indem hier der von Hesse eingeschlagene Gedankengang auch die kürzeste symbolische Darstellung gestattet.

Die gesuchte Gleichung ist zu entwickeln aus der Discriminante:

$$3a_x^2a_y^2 \cdot a_y^4 - 2(a_xa_y^3)^2 = 0$$

unter den Bedingungen:

$$a_x^4 = 0, \quad a_x^3a_y = 0, \quad u_y = 0,$$

indem man aus den beiden letzten der Bedingungsgleichungen die y vermittelst x und u ausdrückt, und im Weiteren zeigt, dass alle willkürlichen Grössen u herausgehen und nur eine Gleichung 14. Grades in x allein zurückbleibt.

Für den Schnittpunkt der Tangente $a_x^3a_y = 0$ und der beliebigen Geraden $u_y = 0$ erhält man die Coordinaten

$$y_i = b_x^3 \widehat{bu_i},$$

so dass

$$a_y = b_x^3(abu)$$

wird.

Vermittelst der Werthe von y_i stellt man den Ausdruck $a_x^2a_y^2$ direct her, und leitet daraus durch Polarisirung $a_xa_y^3$ und a_y^4 ab, wobei zu beachten ist, dass

$$\sum \frac{da_y}{dx_i} y_i = 3b_x^2b_y(abu).$$

Es sei voraus bemerkt, dass es nicht nöthig ist, in den nachfolgenden Rechnungen die mit $a_x^4 = b_x^4 = \cdots = 0$ multiplicirten Ausdrücke mitzuführen, da aus denselben durch den später anzuwendenden Polarisationsprocess nur Ausdrücke erhalten werden, welche verschwinden.

Man erhält für:

$$\begin{aligned}
a_x^2 a_y^2 &= a_x^2 b_x^3 c_x^3 (abu)(acu)\\
&= -\tfrac{1}{2} a_x^2 b_x^2 c_x^2 \left\{b_x(acu) - c_x(abu)\right\}^2\\
&= -\tfrac{1}{2} a_x^2 b_x^2 c_x^2 \left\{a_x(cbu) + u_x(abc)\right\}^2\\
&= a_x^3 b_x^2 c_x^2 (bcu)(abc)\cdot u_x - \tfrac{1}{2} a_x^2 b_x^2 c_x^2 (abc)^2 \cdot u_x^2\\
&= \tfrac{1}{3}\, \alpha_x^6 \cdot u_x^2 - \tfrac{1}{2}\, \alpha_x^6 \cdot u_x^2,
\end{aligned}$$

also

(I) $$a_x^2 a_y^2 = -\tfrac{1}{6}\, \alpha_x^6 \cdot u_x^2.$$

Durch Polarisirung des Ausdrucks für $a_x^2 a_y^2$ in Bezug auf x ergiebt sich:

$$2 a_x a_y^3 + 2 a_x^2 a_y \cdot 3 b_x^2 b_y (abu) = -\alpha_x^5 \alpha_y u_x^2 - \tfrac{1}{3}\, \alpha_x^6 u_x u_y$$

oder:

(II) $$a_x a_y^3 = -\tfrac{1}{2}\, \alpha_x^5 \alpha_y \cdot u_x^2.$$

Wird jetzt noch die Gleichung (II) polarisirt, so bekommt man:

$$\begin{aligned}
&a_y^4 + 9 a_x a_y^2 b_x^2 b_y (abu)\\
&= -\tfrac{5}{2}\, \alpha_x^4 \alpha_y^2 \cdot u_x^2 - \alpha_x^5 \alpha_y \cdot u_x u_y - \tfrac{3}{2}\, \alpha_x^5 b_x^2 b_y (\alpha b u) \cdot u_x^2.
\end{aligned}$$

Das zweite Glied der linken Seite lässt sich folgendermassen umformen:

$$\begin{aligned}
&a_x a_y^2 b_x^2 b_y (abu)\\
&= a_x \cdot b_x^2 b_y (abu)\, c_x^3 d_x^3 (acu)(adu)\\
&= -\tfrac{1}{2} a_x b_x^2 b_y (abu)\, c_x^2 d_x^2 \left\{c_x(adu) - d_x(acu)\right\}^2\\
&= -\tfrac{1}{2} a_x b_x^2 b_y (abu)\, c_x^2 d_x^2 \left\{a_x(dcu) + u_x(acd)\right\}^2\\
&= -\tfrac{1}{2} a_x^3 b_x^2 b_y c_x^2 d_x^2 (abu)(cdu)^2\\
&\quad + a_x^2 b_x^2 c_x^2 d_x^2 b_y (abu)(cdu)(acd)\cdot u_x\\
&\quad - \tfrac{1}{2} a_x b_x^2 c_x^2 d_x^2 b_y (abu)(acd)^2 \cdot u_x^2.
\end{aligned}$$

In dieser Gleichung wird das erste Glied

$$\tfrac{1}{2} b_x^2 b_y^2 \cdot c_x^2 d_x^2 (cdu)^2 = -\tfrac{1}{12}\, \alpha_x^6 a_x^2 b_x^2 (abu)^2 \cdot u_x^2,$$

das zweite

$$\tfrac{1}{3}\, a_x^2 b_x^2 c_x^2 d_x^2 (acd) \left\{(cdu)(abu) + (dau)(cbu) + (acu)(dbu)\right\} \cdot u_x.$$

Dieser Ausdruck wird Null, da die Summe der drei Determinantenproducte diesen Werth hat. Das letzte Glied lässt sich auf die Form bringen:

$$-\tfrac{1}{2}\, \alpha_x^5 b_x^2 b_y (\alpha b u) \cdot u_x^2,$$

daher

$$\begin{aligned}
&9 a_x a_y^2 b_x^2 b_y (abu)\\
&= u_x^2 \left\{-\tfrac{3}{4} \alpha_x^6 a_x^2 b_x^2 (abu)^2 - \tfrac{9}{2}\, \alpha_x^5 b_x^2 b_y (\alpha b u)\right\},
\end{aligned}$$

mithin

(III) $$a_y^4 = u_x^2 \left\{\tfrac{3}{4} \alpha_x^6 a_x^2 b_x^2 (abu)^2 + 3 \alpha_x^5 b_x^2 b_y (\alpha b u) - \tfrac{5}{2}\, \alpha_x^4 \alpha_y^2\right\}.$$

Mit Hilfe der drei vorstehend entwickelten Ausdrücke lässt sich nun die Discriminante angeben zu:

$$u_x^4 \cdot \tfrac{1}{2}\left\{-\tfrac{3}{4}\alpha_x^6 \cdot \beta_x^6 \cdot a_x^2 b_x^2 (a b u)^2 - 3\beta_x^6 \cdot \alpha_x^5 b_x^2 b_y (\alpha b u)\right.$$
$$\left. - \alpha_x^5 \beta_x^5 \alpha_y \beta_y + \tfrac{5}{2}\beta_x^6 \cdot \alpha_x^4 \alpha_y^2\right\} = 0.$$

Es verbleibt also die in der Klammer stehende Gleichung 16. Grades zur Betrachtung.

Ersetzt man in derselben die y überall durch die x, so wird:

$$\begin{aligned}
&\alpha_x^5 b_x^2 b_y (\alpha b u)\\
=\ &\alpha_x^5 b_x^2 (\alpha b u)\, a_x^3 (b a u)\\
=\ &-\tfrac{1}{2}\alpha_x^6 \cdot a_x^2 b_x^2 (a b u)^2 - \tfrac{1}{2}\alpha_x^5 a_x^2 b_x^2 (a b u)(\alpha a b) \cdot u_x,\\
&\alpha_x^5 \beta_x^5 \alpha_y \beta_y\\
=\ &\alpha_x^5 \beta_x^5 a_x^3 b_x^3 (\alpha a u)(\beta b u)\\
=\ &-\tfrac{1}{2}\alpha_x^6 \cdot \beta_x^6 \cdot a_x^2 \cdot b_x^2 (a b u)^2 + \beta_x^6 \cdot \alpha_x^5 a_x^2 b_x^2 (a b u)(\alpha a b) \cdot u_x\\
&-\tfrac{1}{2}\alpha_x^5 \beta_x^5 a_x^2 b_x^2 (\alpha a b)(\beta a b) \cdot u_x^2,\\
&\alpha_x^4 \alpha_y^2\\
=\ &\alpha_x^4 a_x^3 b_x^3 (\alpha a u)(\alpha b u)\\
=\ &-\tfrac{1}{2}\alpha_x^6 \cdot a_x^2 b_x^2 (a b u)^2 + \alpha_x^5 a_x^2 b_x^2 (a b u)(\alpha a b) \cdot u_x\\
&-\tfrac{1}{2}\alpha_x^4 a_x^2 b_x^2 (\alpha a b)^2 \cdot u_x^2.
\end{aligned}$$

Unter Benutzung dieser Werthe reducirt sich die gesuchte Gleichung nach Absonderung des Factors $\frac{1}{4}u_x^2$ auf:

$$2\alpha_x^5 \beta_x^5 a_x^2 b_x^2 (\alpha a b)(\beta a b) - 5\beta_x^6 \cdot \alpha_x^4 a_x^2 b_x^2 (\alpha a b)^2 = 0\,.$$

Dresden, Anfang August 1880.