Über Funktionen mit beschränktem mittleren Quadrat und über die Grenzen der Flächenvergrößerung bei konformer Abbildung.

Von **Georg Hamel** in Aachen.

Bekannt ist folgender Satz:

„Wenn die Funktion

$$f(z) = a_0 + a_1 z + a_2 z^2 + \cdots$$

für $|z| < R$ regulär ist, so ist das über den Kreis um den Nullpunkt mit dem Radius $|z| < R$ erstreckte Integral

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} |f(z)|^2 \, d\varphi = \sum_0^{\infty} |a_n|^2 \, |z|^{2n},$$

so daß, wenn

$$\lim_{|z| = R} \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} |f(z)|^2 \, d\varphi = M$$

existiert,

$$\sum_0^{\infty} |a_n|^2 R^{2n} = M$$

sein muß. Und umgekehrt.

Wir fragen nun:

Wenn

$$f(z) = a_0 + a_1 z + a_2 z^2 + \cdots$$

im Einheitskreise regulär ist und

$$|a_0|^2 + |a_1|^2 + \cdots = M \tag{1}$$

gegeben ist, für welche aller dieser mit der Bedingung (1) verträglichen Funktionen ist der Mittelwert des Quadrates des Absolutwertes $|f(z)|$ über irgend einen gegebenen, ganz im Innern des Einheitskreises gelegenen Kreis ein Maximum?, d. h.

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} |f(z)|^2 d\varphi = \max, \qquad z = \rho e^{\alpha i} + \sigma e^{\varphi i}$$
$$0 < \rho < 1, \quad 0 \leqq \sigma \leqq 1 - \rho.$$

Für $\sigma = 0$ ist die Frage nach der an der Stelle $z_0 = \rho e^{\alpha i}$ absolut größten Funktion mitenthalten.

Wir werden sehen, daß die Frage auf die Lösung eines linearen Gleichungssystems mit unendlich vielen Unbekannten und dem Parameter λ führt:

$$\lambda\,|a_m| = \sum_s |a_s|\, g_{m,s}(\rho, \sigma).$$

Für $\sigma < 1 - \rho$ ist die quadratische Form $\sum |a_m|\,|a_s|\,g_{m,s}$ beschränkt und vollstetig, sie hat daher[1]) ein Punktspektrum und es gibt ein bestimmtes maximales $\lambda = \lambda_0 = \frac{1}{1 - a\rho}$, wo $a\,(<1)$ eine Funktion von ρ und σ ist [Formel (7), Seite 53]. Das gesuchte Maximum ist $\frac{M}{1 - a\rho}$ und die zugehörige Funktion für $\alpha = 0$ (was natürlich keine Beschränkung der Allgemeinheit bedeutet) $\frac{\sqrt{M(1 - a^2)}}{1 - az}$. Wir werden auch alle anderen Lösungen des Gleichungssystems und die zugehörigen Eigenwerte angeben können.

Wenn aber $\sigma = 1 - \rho$ ist, wenn also der innere Kreis an den Einheitskreis heranreicht, so gibt es kein Maximum, die quadratische Form ist nicht beschränkt. Eigenwerte sind jetzt alle positiv reellen λ und wir können auch die zugehörigen Lösungen des Gleichungssystems angeben.

Nach derselben Methode beweisen wir den Satz:

„Unter allen Funktionen, welche den Einheitskreis auf ein Gebiet vom Inhalt J abbilden, bildet die Funktion

$$\frac{1 - a^2}{a}\sqrt{\frac{J}{\pi}}\,\frac{1}{1 - az} + C$$

den Kreis mit dem Mittelpunkt $z_0 = \rho e^{\alpha i}$ und dem Radius $\sigma < 1 - \rho$ auf eine möglichst große Fläche ab, und zwar ist dieses Maximum

$$\frac{\sigma^2 J}{(1 - a\rho)^2};$$

[1]) Hilbert, Grundzüge einer Theorie der linearen Integralgleichungen, Seite 148, Satz 35.

für $\sigma = 1 - \rho$ ist die obere Grenze J selbst, aber es gibt keine Funktion, welche diese Abbildung leistet."

a ist dabei derselbe durch σ und ρ bestimmte Wert wie beim ersten Problem. Bemerkt sei noch, daß die Hilbertsche Theorie im folgenden nicht gebraucht wird.

* * *

Es ist

$$f(z) = \sum_0^\infty c_n (z - z_0)^n = \sum_0^\infty \frac{1}{n!} f^{(n)}(z_0)\, \sigma^n e^{n\varphi i},$$

also

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} |f(z)|^2 d\varphi = \sum_0^\infty \frac{1}{(n!)^2} f^n(z_0) \cdot \bar{f}^{(n)}(\bar{z}_0)\, \sigma^{2n}$$

$$= \sum_0^\infty \frac{\sigma^{2n}}{(n!)^2} \left\{ \sum_n^\infty \frac{m!}{(m-n)!} a_m \rho^{m-n} e^{(m-n)\alpha i} \cdot \sum_n^\infty \frac{s!}{(s-n)!} \bar{a}_s \rho^{s-n} e^{-(s-n)\alpha i} \right\}$$

$$\leqq \sum_{n=0}^\infty \frac{\sigma^{2n}}{(n!)^2} \sum_n^\infty |a_m| \frac{m!}{(m-n)!} \rho^{m-n} \cdot \sum_n^\infty |a_s| \frac{s!}{(s-n)!} \rho^{s-n},$$

und zwar kann die obere Grenze bei gegebener Bedingung (1) auch erreicht werden, so daß man direkt das Maximum der letzten Summe unter der Bedingung (1) suchen kann.

Da aber alle Glieder der vorstehenden Doppelreihe positiv sind, fällt die Frage nach der Beschränktheit und Konvergenz und also auch die Frage nach einem eventuellen Maximum zusammen mit der entsprechenden Frage bei der umgestellten Reihe[1])

$$\sum_{m,s=0}^\infty |a_m|\,|a_s|\, g_{m,s}(\rho, \sigma), \tag{2}$$

wo

$$g_{m,s}(\rho, \sigma) = \sum_{\substack{n \leqq m \\ n \leqq s}} \frac{m!\, s!}{(n!)^2 (m-n)!\, (s-n)!} \rho^{m+s-2n} \sigma^{2n}. \tag{3}$$

Es ist $g_{m,s} = g_{s,m}$ eine ganze rationale Funktion von σ und ρ.

Unsere Aufgabe, (2) zum Maximum zu machen mit der Nebenbedingung (1), führt nun entweder auf die linearen Gleichungen

$$\lambda\, |a_m| = \sum_0^\infty |a_s|\, g_{m,s} \tag{4}$$

[1]) Siehe z. B. Pringsheim: Vorlesungen.

mit symmetrischem Koeffizientenschema oder auf die Möglichkeit, daß einige $|a_m|$ an der Grenze des zulässigen Bereiches liegen, also Null sind. Man beweist aber leicht, daß die letztere Möglichkeit kein Maximum liefern kann. Denn, nehmen wir an, es sei einmal

$$a_m = 0, \quad \text{aber} \quad |a_s| = \alpha > 0.$$

Dann nehmen wir ein zweites Mal $a_m = a'_m$, $a_s = a'_s$, so daß

$$|a'_m|^2 + |a'_s|^2 = \alpha^2,$$

während alle anderen a bleiben und also (1) nicht verletzt wird. Dann ist die Differenz der quadratischen Formen (2) im zweiten Falle und im ersten

$$|a'_m|^2 g_{m,m} + 2|a'_m|'\sum|a_t|g_{m,t} + 2|a'_m||a'_s|g_{m,s} + |a'_s|^2 g_{s,s} +$$
$$+ 2|a'_s|'\sum|a_t|g_{s,t} - \alpha^2 g_{s,s} - 2\alpha'\sum|a_t|g_{s,t}$$

(wobei der Strich an dem Σ andeute, daß $t = m$ und $t = s$ auszulassen sind) oder

$$|a'_m|^2(g_{m,m} - g_{s,s}) + 2|a'_m||a'_s|g_{m,s} + 2(|a'_m|)'\sum|a_t|g_{m,t} +$$
$$+ 2(|a'_s| - \alpha)'\sum|a_t|g_{m,s}.$$

Da nun alle $g > 0$ und also die beiden mittleren Glieder positiv sind, ist der ganze Ausdruck bei hinreichend kleinem $|a'_m|$ positiv, die quadratische Form im zweiten Falle also größer als im ersten. ($|a'_s| - \alpha$ ist ebenso wie das erste Glied quadratisch in $|a'_m|$.)

Wir haben also das Gleichungssystem (4) zu lösen. Zunächst stellen wir für $g_{m,s}(\rho, \sigma)$ einen anderen Ausdruck her. Es ist

$$g_{m,s} = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}(\rho + \sigma e^{-\varphi i})^m(\rho + \sigma e^{\varphi i})^s\, d\varphi, \tag{5}$$

wie man leicht durch Anwenden des binomischen Satzes und Ausintegrieren erkennt. Also ist

$$|g_{m,s}| < (\rho + \sigma)^{m+s}$$

und deshalb die quadratische Form (2) vollstetig und beschränkt, wenn $\rho + \sigma < 1$ ist. Denn in diesem Falle ist sie kleiner als

$$M\Sigma(\rho + \sigma)^{m+s} = M\left(\sum_0^\infty(\rho + \sigma)^m\right)^2 = \frac{M}{(1 - \rho - \sigma)^2}.$$

Außerdem ist

$$\Sigma g_{m,m} \leqq \Sigma(\rho + \sigma)^{2m} = \frac{1}{1 - (\rho + \sigma)^2}$$

endlich.[1])

[1]) Siehe Hilbert: Satz 36, Seite 150, 151 und den oben zitierten Satz 35.

Mithin liefert das Gleichungssystem (4) ein größtes λ und dieses entspricht dem gesuchten Maximum, denn es folgt aus (4) in bekannter Weise durch Multiplikation mit $|a_m|$ und Summation

$$\lambda M = \sum_{m,s} |a_m|\,|a_s|\,g_{m,s}.$$

Um nun (4) wirklich zu lösen, multiplizieren wir mit z^m und summieren unter Benützung von (5). Setzen wir noch

$$\sum_0^\infty |a_m|\,z^m = F(z),$$

so daß $F(z)$ die gesuchte Funktion für $\alpha = 0$, d. h. z_0 reell positiv ergibt, so bekommen wir

$$\lambda F(z) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} F(\rho + \sigma e^{\varphi i}) \sum_{m=0}^{\infty} \left(z(\rho + \sigma e^{-\varphi i})\right)^m d\varphi =$$

$$= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} F(\rho + \sigma e^{\varphi i}) \frac{d\varphi}{1 - z(\rho + \sigma e^{-\varphi i})}$$

oder nach Einführen der komplexen Variabeln $u = e^{\varphi i}$

$$\lambda F(z) = \frac{1}{2\pi i}\int F(\rho + \sigma u) \frac{du}{u\left(1 - z\left(\rho + \sigma \frac{1}{u}\right)\right)} =$$

$$= \frac{1}{2\pi i}\,\frac{1}{1 - z\rho}\int F(\rho + \sigma u) \frac{du}{u - \frac{z\sigma}{1 - z\rho}},$$

wobei die Integrale über den Einheitskreis zu erstrecken sind. Nun ist, wenn $0 < \rho < 1$ und $0 \leqq \sigma < 1 - \rho$, $|z| \leqq 1$

$$\left|\frac{z\sigma}{1 - z\rho}\right| < \frac{\sigma}{1 - \rho} < 1$$

$$|\rho + \sigma u| < \rho + \sigma < 1;$$

also ist nach dem Cauchyschen Residuensatze

$$\lambda F(z) = \frac{1}{1 - z\rho} F\left(\rho + \sigma \frac{z\sigma}{1 - z\rho}\right) = \frac{1}{1 - z\rho} F\left(\frac{\rho - z(\rho^2 - \sigma^2)}{1 - z\rho}\right). \quad (6)$$

Es wird sich also jetzt darum handeln, diese Funktionalgleichung zu lösen. Zu dem Zweck suchen wir die Fixpunkte der Transformation

$$z' = \frac{\rho - z(\rho^2 - \sigma^2)}{1 - z\rho},$$

welche der Gleichung genügen

$$z_0^2 \rho - z_0(1 + \rho^2 - \sigma^2) + \rho = 0,$$

so daß

$$z_0 = \frac{1 + \rho^2 - \sigma^2}{2\rho} \pm \frac{1}{2\rho}\sqrt{\left((1+\rho)^2 - \sigma^2\right)\left((1-\rho)^2 - \sigma^2\right)}.$$

Die Wurzeln sind verschieden und reell, solange $\sigma < 1 - \rho$, ihr Produkt ist 1. Sei die kleinere von ihnen mit a bezeichnet, so ist die größere $\frac{1}{a}$. Es besteht dann zwischen a, ρ, σ die Gleichung

$$a + \frac{1}{a} = \rho + \frac{1}{\rho} - \frac{\sigma^2}{\rho} \tag{7}$$

Führen wir eine neue Variable x durch die Substitution ein:

$$x = \frac{z - a}{\frac{1}{a} - z} = a\frac{z - a}{1 - az} \tag{8}$$

und entsprechend

$$x' = \frac{z' - a}{\frac{1}{a} - z'} = a\frac{z' - a}{1 - az'},$$

so muß die Transformation

$$z' = \frac{\rho - z(\rho^2 - \sigma^2)}{1 - z\rho}$$

die Form

$$x' = cx$$

annehmen.

Nun wird aus $z = 0$, $z' = \rho$. Ersterem entspricht $x = -a^2$, letzterem $x' = a\frac{\rho - a}{1 - a\rho}$. Also ist

$$c = -\frac{1}{a}\,\frac{\rho - a}{1 - a\rho} = \frac{1 - \frac{\rho}{a}}{1 - a\rho}.$$

Ferner läuft a von ρ bis 1, wenn σ von 0 bis $1-\rho$ läuft. Infolgedessen läuft c von 0 bis 1. Denn c wächst mit a. Es entsprechen sich also monoton wachsend die Ungleichheiten

$$0 \leqq \sigma \leqq 1-\rho$$
$$\rho \leqq a \leqq 1$$
$$0 \leqq c \leqq 1.$$

Endlich führen wir noch x und x' in den Faktor $1-z\rho$ von (6) ein. Es ist

$$1-z\rho = 1-\rho\frac{1}{a}\frac{a^2+x}{1+x} = \frac{a-\rho a^2+(a-\rho)x}{a(1+x)}$$
$$= \frac{a-\rho a^2+(a-\rho)\frac{1}{c}x'}{a(1+x)} = (1-a\rho)\frac{1+x'}{1+x}.$$

Mithin lautet die Funktionalgleichung (6)

$$\lambda(1-a\rho)\frac{F(z)}{1+x} = \frac{F(z')}{1+x'}$$

oder, wenn wir

$$\frac{F(z)}{1+x} = \frac{F\left(\frac{1}{a}\frac{a^2+x}{1+x}\right)}{1+x} = H(x)$$

setzen,

$$\lambda(1-a\rho)H(x) = H(x') = H(cx). \tag{6a}$$

Was wird nun bei der Substitution (8) aus dem Einheitskreise $|z|=1$, innerhalb dessen $F(z)$ existiert? Jedenfalls, wegen der Realität der Koeffizienten, wieder ein Kreis, dessen Mittelpunkt auf der reellen Achse liegt. Aus $z=1$ wird $x=a$, aus $z=-1$ wird $x=-a$. Also entspricht $|z|\leqq 1$, $|x|\leqq a$.

Mithin ist $H(x)$ für $|x|<a$ regulär.

Nun sind zwei Fälle möglich:

1. Es ist $H(o)\neq 0$. Dann folgt aus (6 a) für $x=0$

$$\lambda(1-a\rho)=1,\quad \lambda=\frac{1}{1-a\rho}$$

und weiter

$$H(cx)=H(x),$$

wo wegen

$$0\leqq\sigma<1-\rho,\quad 0\leqq c<1.$$

Dann folgt aber weiter

$$H(x) = H(c^n x)$$

für beliebig großes n, also

$$H(x) = \lim_{n=\infty} H(c^n x) = H(o),$$

d. h. H konstant, gleich H_o.

Dem entspricht

$$F(z) = H_o \cdot (1 + x) = H_o \cdot \frac{1 - a^2}{1 - az}.$$

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \big(F(z)\big)^2 d\varphi = M$$

gibt

$$F(z) = \frac{\sqrt{M(1 - a^2)}}{1 - az}.$$

Wie wir weiter sehen werden, gibt diese Lösung das wirkliche Maximum, und zwar ist das zugehörige

$$\lambda = \lambda_0 = \frac{1}{1 - a\rho},$$

$a \ (< 1)$ ist nach (7) aus ρ und σ bestimmt. Für $\sigma = 0$ ergibt sich $a = \rho$, also

$$F(z) = \frac{\sqrt{M(1 - \rho^2)}}{1 - \rho z}$$

und

$$\lambda = \lambda_0 = \frac{1}{1 - \rho^2}.$$

[Man vergleiche damit einen Satz von Hardy,[1]) der bewiesen hat, daß für eine gewisse Unterklasse unserer Funktionen $\lim_{\varrho=1} \sqrt{1 - \rho}\,\big(f(z)\big) = 0$ ist.]

2. Es sei $H(o) = 0$, und zwar

$$H(x) = x^n G(x),$$

wo

$$G(o) \neq 0.$$

Dann folgt aus (6a)

$$\lambda(1 - a\rho)\, x^n G(x) = c^n x^n G(cx),$$

[1]) Siehe Landau: Ergebnisse der Funktionentheorie, Seite 9 und 26.

also ebenso wie vorhin

$$\lambda = \lambda_n = \frac{c^n}{1 - a\rho},$$

$$G(x) = G(o) = G_o,$$

$$H(x) = x^n G_o,$$

$$F(z) = (1 + x)\, x^n G_o = G_o (1 - a^2)\, a^n \frac{(z - a)^n}{(1 - az)^{n+1}}.$$

G_o bestimmt sich wieder aus der Bedingung

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \bigl(F(z)\bigr)^2 d\varphi = M.$$

Diese $\lambda = \lambda_n = \frac{c^n}{1 - a\rho}$ geben die weiteren Eigenwerte. Weil $c < 1$, sind sie alle kleiner als $\lambda_0 = \frac{1}{1 - a\rho}$, das also in der Tat dem wahren Maximum entspricht.

* * *

Wir haben bis jetzt $\sigma < 1 - \rho$ vorausgesetzt. Weil bei $\sigma = 1 - \rho$, $a = 1$, $c = 1$ wird, nähert sich beim Grenzübergang $\sigma = 1 - \rho$, λ_0 dem bestimmten Werte $\frac{1}{1 - \rho}$, die λ_n nähern sich allen Werten zwischen 0 und $\frac{1}{1 - \rho}$, die Funktionen aber haben keine bestimmten Grenzfunktionen.

Der direkte Ansatz wird zeigen, daß es für $\sigma = 1 - \rho$ kein maximales λ gibt, die ganze reelle positive Halbachse $\lambda \geqq 0$ wird Spektrum der quadratischen Form

$$\Sigma\, |a_m|\, |a_s|\, g_{m,s}.$$

Die zugehörigen Funktionen lassen sich aber wieder bestimmen.

Die Untersuchung läuft für $\sigma = 1 - \rho$ bis Gleichung (6) wie oben. Auch diese Gleichung ist jetzt noch richtig: man muß nur $|u| = 1 - \varepsilon$ nehmen und ebenso $|z| < 1 - \varepsilon$, wo aber ε beliebig klein sein darf. Die Substitution

$$z' = \frac{\rho - z\bigl(\rho^2 - (1 - \rho)^2\bigr)}{1 - z\rho}$$

hat aber jetzt einen einzigen Fixpunkt: $z_0 = 1$.

Dementsprechend setzen wir jetzt

$$\begin{aligned} x &= \frac{1}{1-z} \\ x' &= \frac{1}{1-z'}\,. \end{aligned} \tag{8'}$$

Aus der Substitution in z muß jetzt in x werden

$$x' = \alpha x + \beta.$$

Nun entspricht

$$z = \infty, \; z' = \frac{\rho^2 - (1-\rho)^2}{\rho} = \frac{-1+2\rho}{\rho},$$

also entspricht

$$x = 0, \; x' = \frac{1}{1 + \frac{1-2\rho}{\rho}} = \frac{\rho}{1-\rho},$$

somit ist

$$\beta = \frac{\rho}{1-\rho}.$$

Ferner entspricht $z = 0$, $z' = \rho$, also entspricht $x = 1$, $x' = \frac{1}{1-\rho}$, weshalb

$$\frac{1}{1-\rho} = \alpha + \frac{\rho}{1-\rho}, \quad \alpha = 1.$$

Die Substitution heißt also

$$x' = x + \frac{\rho}{1-\rho}.$$

Aus dem Faktor $1 - z\rho$ wird

$$1 - z\rho = 1 - \rho\,\frac{x-1}{x} = \frac{x - \rho x + \rho}{x} = (1-\rho)\,\frac{x + \frac{\rho}{1-\rho}}{x} = (1-\rho)\,\frac{x'}{x}.$$

Daher wird aus (6)

$$\lambda\,(1-\rho)\,\frac{F(z)}{x} = \frac{F(z')}{x'}$$

oder nach der Substitution $\dfrac{F(z)}{x} = \dfrac{F\left(\frac{x-1}{x}\right)}{x} = H(x)$

$$\lambda\,(1-\rho)\,H(x) = H(x') = H\left(x + \frac{\rho}{1-\rho}\right). \tag{6'a}$$

Nun wird bei der Substitution (8′) aus dem Einheitskreise $|z| = 1$ die zur reellen Achse senkrechte Gerade

$$x = \frac{1}{2} + ti,$$

aus $|z| < 1$ wird, weil $z = 0$, $x = 1$ entspricht

$$\Re(x) > \frac{1}{2} \cdot$$

Mithin ist $H(x)$ für $\Re(x) > \frac{1}{2}$ regulär analytisch mit Ausnahme des unendlich fernen Punktes, der $z = 1$ entspricht.

Setzen wir nun

$$H(x) = e^{\nu x} G(x),$$

so wird aus (6′a)

$$\lambda(1-\rho)\, e^{\nu x} G(x) = e^{\nu \frac{\varrho}{1-\varrho}} e^{\nu x} G\left(x + \frac{\rho}{1-\rho}\right)$$

und wenn wir

$$\lambda(1-\rho) = e^{\nu \frac{\varrho}{1-\varrho}},$$

d. h.

$$\nu = \frac{1-\rho}{\rho}\, ln\, \lambda(1-\rho)$$

setzen, wobei der Logarithmus reell sein soll, so folgt

$$G(x) = G\left(x + \frac{\rho}{1-\rho}\right) \cdot$$

$G(x)$ ist ebenfalls für $\Re(x) > \frac{1}{2}$ regulär. Die vorstehende Funktionalgleichung aber macht daraus eine ganze transzendente Funktion von der Periode $\frac{\rho}{1-\rho}$ · Also ist

$$F(z) = x\, H(x) = x\, e^{\nu x} G(x) = \frac{1}{1-z}\, e^{\frac{\nu}{1-z}}\, G\left(\frac{1}{1-z}\right)$$

und

$$\nu = \frac{1-\rho}{\rho}\, ln\, \lambda(1-\rho). \tag{9}$$

Die Bedingung

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |F(z)|^2\, d\varphi = M,$$

das Integral über den Einheitskreis erstreckt, führt auf

$$M = \frac{1}{2\pi i}\int |F(z)|^2 \frac{dz}{z} = \frac{1}{2\pi i}\int |x e^{\nu x} G(x)|^2 \frac{dx}{x(x-1)} =$$

$$= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \left|\frac{1}{2}+ti\right|^2 e^{\nu} \left|G\left(\frac{1}{2}+ti\right)\right|^2 \frac{dt}{\left(\frac{1}{2}+ti\right)\left(ti-\frac{1}{2}\right)} =$$

$$= \frac{e^{\nu}}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \left|G\left(\frac{1}{2}+ti\right)\right|^2 dt.$$

Es muß also die ganze transzendente Funktion G noch der Bedingung genügen

$$\int_{-\infty}^{\infty} \left|G\left(\frac{1}{2}+ti\right)\right|^2 dt = 2\pi e^{-\nu} M. \tag{10}$$

Wenn also der kleinere Kreis bis an den Einheitskreis heranreicht, so kann λ jeden positiv reellen Wert haben und die zu einem λ zugehörenden Funktionen, welche den Lösungen des linearen Gleichungssystems (4) entsprechen, sind

$$F(z) = \frac{1}{1-z}\, e^{\frac{\nu}{1-z}}\, G\left(\frac{1}{1-z}\right),$$

wo ν den oben angegebenen Wert (9) hat und $G(x)$ eine ganze transzendente Funktion von der reellen Periode $\frac{\rho}{1-\rho}$ ist und noch der Bedingung (10) genügt.

* * *

In derselben Weise können wir nun folgende Aufgabe lösen:

Gegeben sei von einer im Einheitskreise regulären Funktion der Flächeninhalt J des Gebietes, auf das sie den Einheitskreis abbildet. Für welche dieser Funktionen ist der Inhalt des Bildes eines gegebenen Teilkreises mit dem Mittelpunkte

$$z = z_0 = \rho e^{ai}$$

und dem Radius $\sigma \leqq 1-\rho$ ein Maximum?

Ist

$$f(z) = a_0 + a_1 z + a_2 z^2 + \cdots,$$

so ist der Inhalt des Bildes des Kreises mit dem Radius R um den Nullpunkt bekanntlich

$$J = \int_0^R \int_0^{2\pi} |f'(z)|^2 r\,dr\,d\varphi = \pi \sum_1^\infty n\,|a_n|^2 R^{2n}.$$

Also lautet die Aufgabe so:

Gesucht werden die $|a_n|$ so, daß

$$\sum_1^\infty n\,|a_n|^2 = \frac{J}{\pi}$$

ist, während

$$\sum_1^\infty n\,\sigma^{2n} \frac{1}{(n!)^2} |f^n(z_0)|^2$$

ein Maximum sein soll.

Der letztere Ausdruck aber ist kleiner als

$$\sum n\,\sigma^{2n} \frac{1}{(n!)^2} \cdot \sum \frac{m!\,s!}{(m-n)!\,(s-n)!} |a_m|\,|a_s|\,\rho^{m+s-2n}$$

und dieses Maximum kann auch erreicht werden. Also bekommen wir die Aufgabe

$$\sum_1^\infty |a_m|\,|a_s|\,h_{m,s}(\rho, \sigma)$$

zum Maximum zu machen, während

$$\sum m\,|a_m|^2 = \frac{J}{\pi}$$

gegeben ist, wobei

$$h_{m,s} = \sum_{\substack{n \leqq m \\ n \leqq s}} n \frac{m!\,s!}{(n!)^2 (m-n)!\,(s-n)!} \rho^{m+s-2n} \sigma^{2n} = \frac{\sigma}{2} \frac{\partial g_{m,s}}{\partial \sigma}$$

ist. [Vgl. Formel (3), Seite 50!)

Wir bekommen das lineare Gleichungssystem

$$\lambda m\,|a_m| = \sum_{s=1}^\infty |a_s|\,h_{m,s} = \frac{\sigma}{2} \sum |a_s| \frac{\partial g_{m,s}}{\partial \sigma}$$

und also nach Multiplikation mit z^m und Summation über m unter Einführung von

$$F(z)=\sum_0^\infty |a_m| z^m$$

genau wie auf Seite 52 und 53

$$\lambda z F'(z)=\frac{\sigma}{2}\frac{\partial}{\partial\sigma}\frac{1}{1-z\rho}F\left(\rho+\frac{z\sigma^2}{1-z\rho}\right)$$

$$=\frac{\sigma^2 z}{(1-z\rho)^2}F'\left(\rho+\frac{z\sigma^2}{1-z\rho}\right)$$

oder

$$\lambda F'(z)=\frac{\sigma^2}{(1-z\rho)^2}F'\left(\rho+\frac{z\sigma^2}{1-z\rho}\right). \tag{6'}$$

Die Untersuchung läuft jetzt genau so weiter wie auf Seite 6, indem wir zunächst den Fall

$$\sigma<1-\rho$$

behandeln. Wir setzen, wie dort,

$$x=a\frac{z-a}{1-az},$$

so daß aus der Transformation

$$z'=\rho+\frac{z\sigma^2}{1-z\rho}$$

$$x'=cx$$

wird. a und c behalten ihre Bedeutung. Aus dem Faktor

$$\frac{\sigma^2}{(1-z\rho)^2} \quad \text{wird} \quad \frac{\sigma^2}{(1-a\rho)^2}\frac{(1+x)^2}{(1+x')^2},$$

so daß die Funktionalgleichung (6') die Form annimmt

$$\lambda\frac{(1-a\rho)^2}{\sigma^2}\frac{F'(z)}{(1+x)^2}=\frac{F'(z')}{(1+x')^2}.$$

Setzen wir

$$\frac{F'(z)}{(1+x)^2}=K(x),$$

so bekommen wir

$$\lambda\left(\frac{1-a\rho}{\sigma}\right)^2 K(x)=K(x')=K(cx)$$

und also

$$\lambda = \frac{\sigma^2}{(1-a\rho)^2} c^n \quad (\text{für } n = 0, 1, 2, \ldots)$$

$$K(x) = K_0 x^n = K_0 a^n \frac{(z-a)^n}{(1-az)^n}$$

$$F'(z) = K_0 a^n (1-a^2)^2 \frac{(z-a)^n}{(1-az)^{n+2}}.$$

Das gesuchte Maximum entspricht $n = 0$, also (für $\alpha = 0$, z_0 reell) der Funktion

$$F'(z) = K_0 (1-a^2)^2 \frac{1}{(1-az)^2};$$

mithin

$$F(z) = K_0 \frac{(1-a^2)^2}{a} \frac{1}{1-az} + C.$$

Aus den linearen Gleichungen folgt in bekannter Weise

$$\pi \sum |a_m| \, |a_s| \, h_{m,s} = \pi \lambda \sum m \, |a_m|^2 = \lambda J,$$

so daß

$$\lambda_0 J = \frac{\sigma^2 J}{(1-a\rho)^2}$$

das gesuchte Maximum ist. Die Funktion, welche das Maximum liefert, ist wesentlich die gleiche wie bei der ersten Aufgabe, nur die multiplikative Konstante bestimmt sich anders. Da

$$\int_0^1 \int_0^{2\pi} r \, dr \, d\varphi \frac{1}{|1-az|^4} = \frac{\pi}{(1-a^2)^2}$$

ist, folgt aus

$$\int_0^1 \int_0^{2\pi} |F'(z)|^2 r \, dr \, d\varphi = J$$

$$K_0^2 (1-a^2)^4 \frac{\pi}{(1-a^2)^2} = J,$$

also

$$F(z) = \frac{1-a^2}{a} \sqrt{\frac{J}{\pi}} \frac{1}{1-az} + C.$$

* * *

Wenn wir jetzt $\sigma = 1 - \rho$ annehmen, bekommen wir, ähnlich wie auf Seite 57, durch die Substitution (8′)

$$\lambda \frac{F'(z)}{x^2} = \frac{F'(z')}{x'^2},$$

also mit der Substitution

$$\frac{F'(z)}{x^2} = K(x)$$

$$\lambda K(x) = K(x') = K\left(x + \frac{\rho}{1-\rho}\right).$$

Daraus weiter mit

$$K(x) = e^{\mu x} G(x)$$

$$\lambda e^{\mu x} G(x) = e^{\mu \frac{\varrho}{1-\varrho}} e^{\mu x} G\left(x + \frac{\rho}{1-\rho}\right)$$

und also mit

$$\mu = \frac{1-\rho}{\rho} \ln \lambda$$

$$G\left(x + \frac{\rho}{1-\rho}\right) = G(x),$$

so daß G wieder die alte regulär periodische Funktion ist. Mithin ist

$$F'(z) = \frac{1}{(1-z)^2} e^{\mu \frac{1}{1-z}} G\left(\frac{1}{1-z}\right).$$

Nun soll aber

$$\int_0^1 \int_0^{2\pi} |F'(z)|^2 \, r \, dr \, d\varphi = J$$

sein. Gehen wir in die x-Ebene über, so wird jedes Flächenelement im Verhältnis

$$\left|\frac{dx}{dz}\right|^2 = \frac{1}{|1-z|^4} = |x|^4$$

verändert. Da außerdem bei dieser Abbildung der Einheitskreis in die Halbebene $\Re(x) \geqq \frac{1}{2}$ übergeht, bekommen wir mit

$$x = s + ti$$

$$\int_{\frac{1}{2}}^{\infty} ds \int_{-\infty}^{\infty} dt \, e^{2\mu s} |G(x)|^2 = J,$$

also sicher

$$\int_{\frac{1}{2}}^{A} ds \int_{-B}^{B} dt\, e^{2\mu s} \,|\, G(x) \,|^2 < J$$

für beliebig große A und B. Daraus aber folgt: Da

$$\int_{-B}^{B} |\, G(s+ti) \,|^2 \, dt$$

positiv und in s periodisch ist, muß

$$\mu \leqq 0$$

sein, d. h.

$$\lambda \leqq 1.$$

Wir haben also als obere Grenze des Inhaltes J selber, was zugleich der Grenzwert von

$$\lambda_0 J = \frac{\sigma^2 J}{(1 - a\,\rho)^2}$$

für $\sigma = 1 - \rho$ ist. Aber es gibt keine dazugehörige Funktion, d. h. $\lambda = 1$ ist nur obere Grenze, nicht Maximum. Denn sonst müßte

$$\int_{\frac{1}{2}}^{\infty} ds \int_{-\infty}^{\infty} |\, G(s+ti) \,|^2 \, dt = J$$

sein, was aber zusammen mit der Periodizität von G unmöglich zu erfüllen ist.